◄ دكتور المادة: علي القبوي

◄المحاضرة السادسة عشر عنوان المحاضرة : دراسة دوال في المتغيرات العشوائية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1- الانتقال بمتغير عشوائي (منقطع) , (مستمر) .

2- الانتقال بشعاع عشوائي (منقطع) , (مستمر) .

3- بعض التمارين .

الفصل الخامس : دراسة دوال في المتغيرات العشوائية

الانتقال بمتغير عشوائي منقطع

ليكن X متغيراً عشوائياً منقطعاً (منفصلاً) مجموعة قيمه : $\mathbb{R}_X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$

وله الكثافة الاحتمالية : $f_X(x) = P(X = x);\ \forall\, x \in \mathbb{R}$

وليكن Y متغيراً مرتبطاً بـ X بالعلاقة $Y = U(X)$ عندئذٍ يمكن حساب مجموعة قيم Y , وكذلك كثافته بالحساب المباشر : $f_Y(y) = P(Y = y_i) = P(U(X) = y_i) = P\left(X = U^{-1}(y_i)\right) = f_X\left(U^{-1}(y_i)\right)$

مثال (1) ليكن X متغيراً عشوائياً له جدول التوزيع (الكثافة) التالي :

X	-1	-2	-3	1	2	3
$f_X(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

عين جدول الكثافة الاحتمالية للمتغير : $Y = |X|$

الحل نلاحظ أنَّ مجموعة قيم Y هي $\mathbb{R}_Y = \{1,2,3\}$ و $\mathbb{R}_X = \{-3,-2,-1,1,2,3\}$

$$f_Y(1) = P(Y = 1) = P(X = -1) + P(X = +1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

$$f_Y(2) = P(Y = 2) = P(X = -2) + P(X = +2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

$$f_Y(3) = P(Y = 3) = P(X = -3) + P(X = +3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

Y	1	2	3	المجموع
$f_Y(y)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	1

مثال (2) ليكن X متغيراً عشوائياً له الكثافة الاحتمالية التالية :

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{(\mu^x . e^{-\mu})}{x!} & ; \ x = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & ; \ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين دالة الكثافة لِـ $Y = 4X$

الحل $Y = 4X = U(x) \Rightarrow X = \frac{Y}{4} = U^{-1}(Y)$, فإنَّ مجموعة قيم X هي :

$\mathbb{R}_X = \{0,1,2, \dots\}$ فتكون مجموعة قيم المتغير Y هي : $\mathbb{R}_Y = \{0,4,8,12, \dots\}$ وتكون دالة الكثافة لِـ Y :

$$f_Y(y) = P(Y = y) = P(4X = y) = P\left(X = \frac{y}{4}\right) = f_X\left(\frac{y}{4}\right) = \frac{\mu^{\frac{y}{4}} . e^{-\mu}}{\left(\frac{y}{4}\right)!}$$

أي أنَّ :

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{(\mu^{\frac{y}{4}} . e^{-\mu})}{\left(\frac{y}{4}\right)!} & ; \ y = 0,4,8, \dots \\ 0 & ; \ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

الانتقال بمتغير عشوائي مستمر

ليكن X متغيراً عشوائياً مستمراً له الكثافة الاحتمالية $f_X(x)$, وليكن $Y = U(X)$ متغيراً معطى بدلالة X

عندئذٍ يكون Y متغيراً عشوائياً مستمراً وكثافته تتعين بالعلاقة : $f_Y(y) = f_X\big(U^{-1}(y)\big) . |(U^{-1}(y))'|$

بحيث : $\big(U^{-1}(y)\big)' = X'_y$, مشتق X بالنسبة لِـ Y

مثال (1) ليكن X متغيراً عشوائياً دالة كثافته الاحتمالية :

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & ; 0 < x < 1 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين دالة الكثافة للمتغير : $Y = -2\,ln\,X$

الحل إنَّ $f_X(x)$ دالة كثافة فعلية للمتغير X , لأنَّ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x).dx = \int_0^1 (1).dx = [x]_0^1 = 1$$

$$Y = U(X) = -2ln\,X \Rightarrow \frac{Y}{-2} = ln\,X \Rightarrow X = e^{-\left(\frac{Y}{2}\right)} = U^{-1}(Y)$$

$$\left(U^{-1}(y)\right)'_y = X'_y = \left(e^{-\frac{y}{2}}\right)'_y = -\frac{1}{2}.e^{-\frac{y}{2}}$$

وعندما : $0 < X < 1 \Rightarrow 0 < Y < +\infty$

ونعلم أنَّ : $f_Y(y) = f_X\left(U^{-1}(y)\right).\left|\left(U^{-1}(y)\right)'\right| \dots.(*)$

وإنَّ : $\left|\left(U^{-1}(y)\right)'\right| = \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}} , f_X\left(U^{-1}(y)\right) = 1$

نعوض في العلاقة $(*)$ فنجد : $f_Y(y) = 1.\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}$ ومنه تكون دالة الكثافة لِ Y هي :

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}} & ; 0 < y < +\infty \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

مثال (2) ليكن X متغيراً عشوائياً كثافته :

$$f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|} \quad ; \quad -\infty < x < +\infty$$

عين كثافته : $Y = X^2$

الحل

$$Y = U(X) = X^2 \Rightarrow X = U^{-1}(Y) = \pm\sqrt{Y}$$

الآن نحسب : $|U^{-1}(Y)'| = \left|\pm\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\right| = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}$

$-\infty < x < +, \quad 0 < y < +\infty$

$$f_X\left(U^{-1}(y)\right) = f_X\left(\pm\sqrt{y}\right) = P[X = \pm x] = P[X = x] + P[X = -x]$$

$$= f_X\left(-y^{\frac{1}{2}}\right) + f_X\left(+y^{\frac{1}{2}}\right)$$

نطبق العلاقة لإيجاد $f_Y(y)$:

$$f_Y(y) = f_X\left(U^{-1}(y)\right).\left|\left(U^{-1}(y)\right)'\right| = \left[f_X\left(-Y^{\frac{1}{2}}\right) + f_X\left(+Y^{\frac{1}{2}}\right)\right].\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\frac{1}{2}e^{-y^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2}e^{-Y^{\frac{1}{2}}}\right]\left(\frac{1}{2}\right)y^{-\frac{1}{2}} = \frac{e^{-y^{\frac{1}{2}}}}{2y^{-\frac{1}{2}}} = \frac{e^{-\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}}$$

ومنه يكون :

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{e^{-\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}} & ; \ 0 < y < +\infty \\ 0 & ; \ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

مثال (3) ليكن X متغيراً عشوائياً كثافته :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & ; \ -1 \le x \le 1 \\ 0 & ; \ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين دالة الكثافة للمتغير : $Y = X^2$

الحل

$Y = U(X) = X^2$ و $X = U^{-1}(Y) = \pm Y^{\frac{1}{2}}$

نلاحظ أنَّ $-1 \le x \le 1$ فيكون $0 \le y \le 1$

نحسب المشتق $\left(U^{-1}(y)\right)' = \pm\frac{1}{2}.y^{-\frac{1}{2}}$, نأخذ القيمة المطلقة للمشتق $\left|\left(U^{-1}(y)\right)'\right| = \frac{1}{2}.y^{-\frac{1}{2}}$

نطبق العلاقة لإيجاد دالة الكثافة لـ Y : $f_Y(y) = f_X\left(U^{-1}(y)\right).|U^{-1}(y)|$

$$= \left[f_X\left(-y^{\frac{1}{2}}\right) + f_X\left(+y^{\frac{1}{2}}\right)\right].\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right].\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}$$

فتكون لـ Y الكثافة الاحتمالية التالية :

$$f_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} & ; \ -1 \le y \le 1 \\ 0 & ; \ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

الانتقال بشعاع عشوائي منقطع (منفصل)

ليكن (X,Y) شعاعاً عشوائياً منقطعاً (منفصلاً) له دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة $f_{X,Y}(X,Y)$

حيث : $\mathbb{R}_Y = \{y_1, \dots, y_n, \dots\}$, $\mathbb{R}_X = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ و $f(x,y) = P[X = x, Y = y]$

ولنفرض أنّه هناك متغيرين عشوائيين منفصلين معرفين بدلالة X و Y من خلال العلاقة :

$$U = \psi_1(X,Y) \ , \ V = \psi_2(X,Y)$$

بحيث أنَّه يمكن حساب X و Y بدلالة U و V , بالشكل :

$$X = w_1(U,V) \quad , \quad Y = w_2(U,V)$$

تعطى بالعلاقة : $f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}\big(w_1(u,v), w_2(u,v)\big)$

ومجموعة قيم الشعاع (U,V) :

$$(u_i, v_j) = \left(\psi_1(x_i,y_j)\,,\psi_2(x_i,y_j)\right)$$

ومجموعة قيم الشعاع (u,v) :

$$\mathbb{R}_u = \{u_1, \dots, u_n, \dots\} \quad , \quad \mathbb{R}_v = \{v_1, \dots, v_n, \dots\}$$

ويكون $P[U = u_i\,, V = v_i] = P[X = w_1(u_i,v_i) \ \ , \ Y = w_2(u_i,v_i)]$

مثال (1) ليكن (X,Y) شعاعاً عشوائياً كثافته المشتركة :

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{n!}{x!y!(n-x-y)!} \times P_1^x . P_2^y (1 - P_1 - P_2)$$

حيث : $y = 0,1,2, \dots, n$; $x = 0,1,2, \dots, n$; ويكون : $0 \le x + y \le n$

ولنعرف المتغيرين $V = \frac{X}{X+Y}$, $U = X + Y$, والمطلوب : عين كثافة الشعاع (U,V)

الحل لدينا $U = \psi(X,Y) = X + Y \ , \ V = \psi(X,Y) = \frac{X}{X+Y}$

بحل المعادلتين السابقتين حل مشترك نجد أنَّ :

$$Y = w_2(U,V) = U.(1-V) \quad , \quad X = w_1(U,V) = U.V$$

فتكون الكثافة المشتركة للشعاع (U,V) هي :

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}\big(U.V\ ,U(1-V)\big)$$

$$= \frac{n!}{(u.v)!(u(1-v))!(n-u)!} P_1^{u.v}.P_2^{u(1-v)}(1-P_1-P_2)^{n-u}$$

حيث : $u.v = 0,1,\dots,n \ ; \ u(1-v) = 0,1,\dots,n \ ; \ 0 \le u \le n$

الانتقال بشعاع عشوائي مستمر

ليكن (X,Y) شعاعاً عشوائياً مستمراً له دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة $f_{X,Y}(x,y)$, وليكن المتغيرين :

$$U = \varphi_1(X,Y)\ ,\ V = \varphi_2(X,Y)$$

حيث: $Y = \psi_2(U,V)$, $X = \psi_1(,V)$ عندئذٍ فإنَّ كثافة الشعاع (U,V) , تعطى بالعلاقة :

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}\big(\psi_1(u,v)\ ,\psi_2(u,v)\big).|J|$$

حيث: $J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$

مثال (2) ليكن (X,Y) شعاعاً عشوائياً كثافته المشتركة :

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{12} & ; \quad 0 < x < 3 \ ,0 < y < 4 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

ولنأخذ المتغيرين $V = X + Y$, $U = \frac{4X}{3Y}$, والمطلوب : عين كثافة الشعاع (U,V)

الحل لدينا $U = \varphi_1(,Y) = \frac{4X}{3Y}$, $V = \varphi_2(X,Y) = X + Y$

وبالحل المشترك نجد أنَّ :

$$X = \psi_1(U,V) = \frac{3VU}{3U+4} \quad ; \quad Y = \psi_2(U,V) = \frac{4V}{3U+4}$$

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{12v}{(3u+v)^2} & \frac{3u}{3u+4} \\ \frac{-12v}{(3u+4)^2} & \frac{4}{3u+4} \end{vmatrix} \Rightarrow J = \frac{12v}{(3u+4)^2}$$

ولدينا : لحساب قيم u , v

$$y = \frac{4v}{3u+4} \ ; 0 < y < 4 \Rightarrow 0 < \frac{4v}{3u+4} < 4 \ \Rightarrow 0 < v < 3u + 4$$

ولدينا :

$$x = \frac{3vu}{3u+4} \ ; 0 < x < 3 \Rightarrow 0 < \frac{3vu}{3u+4} < 3 \ \Rightarrow 0 < u.v < 3u + 4$$

أيضاً نجد أنَّ :

$$f_{X,Y}\big(\psi_1(u,v), \psi_2(u,v)\big) = f_{X,Y}\left(\frac{3vu}{3u+4}, \frac{4v}{3u+4}\right) = \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(x,y).\,|J| = \frac{1}{12}.\frac{12v}{(3u+4)^2}$$

$$\Rightarrow f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} \frac{v}{(3u+4)^2} \ ; \ 0 < v < 3u + 4 \, , 0 < u.v < 3u + 4 \\ 0 \quad ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

انتهت المحاضرة

كل صباح أخبر قلبك أنَّه
يستحق الفرح ...

إعداد: منى شغل**إيناس دليل**نور مهرة