◄ دكتور المادة : حمزة الحاكمي

◄ المحاضرة : الحادية والعشرون ◄ عنوان المحاضرة : مبرهنة سيلوف الاولى

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١- ال $P-$ زمرة

٢- مبرهنة سيلوف الأولى.

مبرهنة : كل زمرة منتهية مرتبتها P^2 تبديلية حيث P عدد اولي.

الاثبات :

$(Z(G):1) \in \{1, P, P^2\}$ (وذلك حسب لاغرانج)

لنفرض أن G زمرة منتهية وأن $(G:1) = P^2$ وحسب المبرهنة السابقة إذا كانت G عبارة عن $P-$ زمرة عندئذ :

$Z(G) \neq < e >$ وبالتالي $(Z(G):1) \neq 1$ إذن:

$$\begin{cases} (Z(G):1) = P & \text{إما} \\ (Z(G):1) = P^2 & \text{أو} \end{cases}$$

إذا كانت $(Z(G):1) = P$ عندئذ

لنأخذ زمرة الخارج $\left(\frac{G}{Z(G)}\right)$ وذلك لان $Z(G)$ ناظمية فنجد أن :

$$\left(\frac{G}{Z(G)}:1\right) = (G:Z(G)) = \frac{(G:1)}{(Z(G):1)} = \frac{P^2}{P} = P$$

ومنه نجد أن $\frac{G}{Z(G)}$ دوارة (مرتبتها عدد اولي)وحسب مبرهنة سابقة تكون G تبديلية .

إذا كانت $(Z(G):1) = P^2$ فإن $G = Z(G)$ وبالتالي فإن G تبديلية .

تمهيدية : لتكن G عبارة عن $P-$ زمرة حيث P عدد اولي عندئذ :

١) كل زمرة جزئية في G هي P – زمرة .

٢) إذا كانت H زمرة جزئية ناظمية في G فإن زمرة الخارج $\frac{G}{H}$ هي $P-$ زمرة .

الاثبات :

لنفرض أن $(G:1)=P^n$ حيث $n\in\mathbb{Z}$

١- لتكن K زمرة جزئية في G عندئذ حسب لاغرانج فإن مرتبة أي زمرة جزئية تقسم مرتبة G .

$$(G:1)=(G:K)(K:1)$$

وهذا يبين أن $(K:1)$ تقسم المقدار P^n ومنه $(K:1)=P^t$ حيث $0\le t\le n$

ومنه الزمرة الجزئية K هي $P-$ زمرة .

٢- لتكن H زمرة جزئية ناظمية في G وحسب (١) فإن H هي عبارة عن $P-$ زمرة .

ومنه $(H:1)=P^k$ حيث $k\le n$ وحسب لاغرانج فإن :

$$\left(\frac{G}{H}:1\right)=(G:H)=\frac{(G:1)}{(H:1)}=\frac{P^n}{P^k}=P^{n-k}$$

ومنه فإن $\frac{G}{H}$ هي أيضا $P-$ زمرة .

مبرهنة : لتكن G زمرة منتهية ولتكن H زمرة جزئية ناظمية في G اذا كان كلاً من الزمر H و $\frac{G}{H}$ هي عبارة عن $P-$ زمرة عندئذ G عبارة عن P$-$ زمرة حيث P عدد اولي .

الاثبات:

لنفرض أن

$$(H:1)=P^n$$

$$\left(\frac{G}{H}:1\right)=P^m$$

حيث $n,m\ge 0$ أعداد صحيحة ، وحسب لاغرانج فإن :

$$(G:1)=(G:H)(H:1)=\left(\frac{G}{H}:1\right)(H:1)=P^m.P^n=P^{m+n}$$

وهذا يبن لنا أن الزمرة G عبارة عن $P-$ زمرة .

مبرهنة سيلوف الأولى

لتكن G زمرة منتهية ومرتبتها تقبل القسمة على P^k بحيث P عدد أولي عندئذ يوجد في G زمرة جزئية مرتبتها P^k .

الاثبات :

سنبرهن بالاستقراء حسب مرتبة G لنفرض أن $(G:1)=P^k.n$

إذا كانت $(G:1)=1$ يتم المطلوب والمبرهنة صحيحة .

لنفرض أن هذه المبرهنة صحيحة من أجل جميع الزمر الجزئية المختلفة عن G والتي مراتبها أقل من مرتبة G

نميز حالتين :

١) يوجد في G زمرة جزئية $H \subsetneq G$ ومرتبتها تقبل القسمة على P^k عندئذٍ طالما $G=mp^k$ $H \subsetneq$ اذاً مرتبته $(H:1)=\lambda p^k$ حيث $\lambda < m$ فحسب الفرض الاستقرائي نجد أن الزمرة H تحوي زمرة جزئية مرتبتها P^k وبالتالي G أيضاً تحوي زمرة جزئية مرتبتها P^k يتم المطلوب .

٢) جميع الزمر الجزئية في G والمختلفة عن G مراتبها لا تقبل القسمة على P^k عندئذ حسب علاقة الصفوف فإن

$$(G:1)=\sum(G:c(a))=\sum_{a\in Z(G)}(G:c(a)) + \sum_{a\notin Z(G)}(G:c(a))$$

$$\Longrightarrow (G:1)=(Z(G):1)+\sum_{a\notin Z(G)}(G:c(a))$$

$$\Longrightarrow (Z(G):1)=(G:1)-\sum_{a\notin Z(G)}(G:c(a)) \qquad (*)$$

ولدينا $P^k.n=(G:1)=\big(\big(G:c(a)\big)(c(a):1)\big)$

ولما كان $(c(a):1)$ لا يقبل القسمة على P^k فرضاً فإن $\big(G:c(a)\big)$ يقبل القسمة على P^k

وبالتالي $\sum_{a\notin Z(G)}(G:c(a))$ يقبل القسمة على P ومنه الطرف الأيمن من $(*)$ يقبل القسمة على P أي أن $(Z(G):1)$ يقبل القسمة على P

$Z(G)$ تبديلية ومنتهية مرتبتها تقبل القسمة على P فإن $Z(G)$ تحوي عنصر مرتبته P وليكن $x \in Z(G)$

وأن : $<x> \subseteq Z(G) \subseteq G$

نعلم أن $Z(G)$ تبديلية وناظميه في G ومنه $<x>$ ناظمية في $Z(G)$ و $<x>$ ناظمية في G ومنه فإن

$$\left(\frac{G}{<x>}:1\right)=(G:<x>)=\frac{(G:1)}{(<x>:1)}=\frac{P^k.n}{P}=P^{k-1}.n$$

ومنه فإن $\frac{G}{<x>}$ زمرة مرتبتها $P^{k-1}.n$ وحسب الفرض الاستقرائي فإن $\frac{G}{<x>}$ تحوي زمرة جزئية مرتبتها P^{k-1}

ولتكن $\frac{K}{<x>}$ حيث K زمرة جزئية في G و $<x> \subseteq K$

$$(K:1)=(K:<x>)(<x>:1)$$

$$=\left(\frac{K}{<x>}:1\right)(<x>:1)=P^{k-1}.P=P^k$$

مثال : ليكن $(G:1)=2^3.3^5.5^4.7$ (أي نكتب المرتبة على جداء اعداد أولية مرفوه لاس صحيح)

حسب المبرهنة السابقة G تحوي زمرة جزئية واحد على الأقل مرتبتها

$$7,5^4,5^3,5^2,5,3^5,3^4,3^3,3^2,3,2^3 2^2,2$$

بينما لاتخبرنا عن إمكانية وجود أي زمر جزئية من مرتبة تقسم مرتبة الزمرة غير الاعداد الأولية المختلفة المرفوعة لاس صحيح

تعريف : لتكن G زمرة منتهية و P عدد اولي و H زمرة جزئية في G مرتبتها تقبل القسمة على P اذا كان $(H:1)=P^k$ وكان P^{k+1} لايقسم مرتبة G نقول في هذه الحالة ان H هي P – زمرة جزئية سيلوفية في G

بالعودة للمثال السابق

2–زمرة جزئية سيلوفية في G ومرتبتها 8 .

3–زمرة جزئية سيلوفية في G ومرتبتها 243 .

5–زمرة جزئية سيلوفية في G ومرتبتها 625 .

7–زمرة جزئية سيلوفية في G ومرتبتها 7 .

انتهت المحاضرة

إعداد: ناريمان جلو – ولاء الأخضر – هلا همج