Syria Math

◄دكتور المادة: خليل تحيى

◄المحاضرة: الثانية والعشرون والأخيرة ◄عنوان المحاضرة: المغلفات

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـالمغلفات.

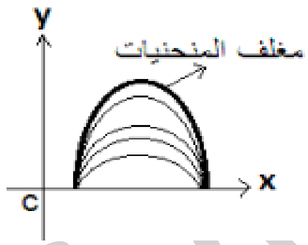
٢ـإيجاد معادلة مغلف جماعة المنحنيات.

٣ـأمثلة لتوضيح المغلفات.

المغلفات

لتكن لدينا المعادلة: $\emptyset(x, y, c) = 0 \ldots (1)$

حيث (x, y) هي الإحداثيات الديكارتية على المستوي بينما المركز وسيطياً متحولاً من أجل قيمة لـc . تعطينا المعادلة (1) منحنيا في المستوي oxy إذا أعطى c كل القيم الممكنة فإننا نحصل على مجموعة من المنحنيات ترتبط بوسيط واحد هو c هذا يكافئ قولنا أنّ المعادلة (1) هي معادلة جماعة منحنيات نرمز لها $\{c_i\}$.



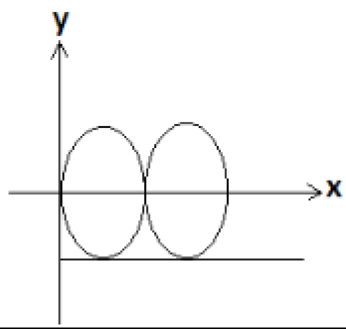
تعريف: نسمي المنحني L مغلف الجماعة c_i إذا مسَّ L في كل نقطة منه واحدا من منحنيات الجماعة c_i.

مثال: نأخذ الجماعة $(x - c)^2 + y^2 = R^2$ حيث R ثابت و c وسيط متحول.

الحل

هي تمثل مجموعة دوائر مركزها $(c, 0)$ ونصف قطرها R .

إن مغلفات هذه الدوائر هي جملة المستقيمين $y = \pm R$.



-إيجاد معادلة مغلف جماعة المنحنيات:

لتكن جماعة المنحنيات المعرفة بالمعادلة (1) ولنفرض أنّ لهذه الجماعة مغلف معطى معادلة من الشكل $y = \varphi(x)$ حيث $\varphi(x)$ *دالة في* x وهي دالة مستمرة قابلة للاشتقاق.

نختار نقطة $M(x,y)$ تقع على المغلف وتقع هذه النقطة أيضا على أحد منحنيات الجماعة (1) ويقابل هذا المنحني قيمة معينة للوسيط c وتجد هذه القيمة من المعادلة (1) من أجل قيمة معينة لدينا $c =$ $C(x,y)$ أي أنه من أجل جميع نقاط المغلف فإن العلاقة التالية محققة $\varphi\big(x,y,C(x,y)\big) = 0 \ldots (2)$

نفرض هنا أن c تابع لـy القابلة للاشتقاق ليست ثابتا في أي مجال للمتحولين x,y

في المعادلة (2) التي تعين المغلف نجد ميل مماس المغلف في النقطة M وبالتالي نشتق (2) بالنسبة لـx ففرضياy كذلك في x :

$$\frac{\partial\emptyset}{\partial x}+\frac{\partial\emptyset}{\partial x}.\frac{\partial c}{\partial x}+\left[\frac{\partial\emptyset}{\partial y}+\frac{\partial\emptyset}{\partial c}.\frac{\partial c}{\partial y}\right]y' = 0$$

$$\emptyset'_x+\emptyset'_y.y'+\emptyset'_c\left[\frac{\partial c}{\partial x}+\frac{\partial c}{\partial y}y'\right] = 0 \ldots (3)$$

أما ميل مماس منحني الجماعة (1) في النقطة M فإنه يتعين من اشتقاق (1):

$$\emptyset'_x+\emptyset'_y.y' = 0 \ldots (4)$$

من (3) و(4) نجد:

$$\emptyset'_c\left[\frac{\partial c}{\partial x}+\frac{\partial c}{\partial y}y'\right] = 0$$

وبما أن : $c(x,y)$ ليس ثابتا فنجد أن: $\frac{\partial c}{\partial x}+\frac{\partial c}{\partial y}.y' \neq 0$

لأنه ليس ثابتا. لذلك فإن: $\emptyset'(x,y,c) = 0 \ldots (5)$

وبذلك تعين المعادلتان التاليتان مغلف جماعي لمنحنيات:

$$\begin{cases}\emptyset(x,y,c) = 0\\ \emptyset'_c(x,y,c) = 0\end{cases} \ldots (6)$$

- تعريف:

ليكن المنحني المعرف بالمعادلة $F(x,y)=0$ ولتكن $M(x_0,y_0)$ نقطة من هذا المنحني ندعو النقطة $M(x_0,y_1)$ من هذا المنحني نقطة شاذة إذا كانت في هذه النقطة:

$$\frac{\partial F}{\partial z}=\frac{\partial F}{\partial y}=0$$

أي أنّ النقطة الشاذة تعين جملة المعادلات :

$$F=0 \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial x}=0 \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y}=0$$

من الواضح أن بعض المنحنيات تملك نقاط شاذة وبعضها لا يملك مثل هذه النقاط.

مثال : $F(x,y)=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$

الحل

$$\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial y}=0 \xrightarrow{\text{لأجل}} x=y=0$$

$$F(x,y)\neq 0=1$$

لا يوجد نقطة شاذة لأن المعادلات الثلاثة لم تتحقق.

مثال : عين النقاط الشاذة في المنحني:

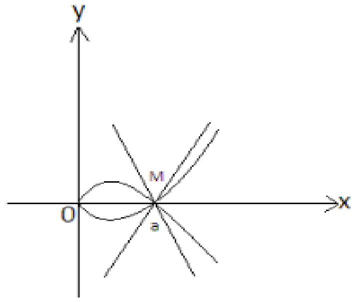
$$F(x,y)=y^2-x(2-a)^2=0 : a>0$$

الحل

نشتق بالنسبة لـy: $\frac{\partial F}{\partial y}=2y$

نشتق بالنسبة لـx : $\frac{\partial F}{\partial x}=-(x-a)^2-2x(x-a)=(x-a)(a-3x)$

إذا حلينا المعادلات حل مشترك نجد أنّ: $y=0 \quad , \quad x=a$



وبالتالي النقطة $M(a,0)$ هي نقطة شاذة وبالتالي إذا حاولنا دراسة سلوك المنحني الممثل بالمعادلة المفروضة في جداء النقطة M فإننا نلاحظ أن هناك خصوصية معينة وهي مرور المنحني مرتين في تلك النقطة وهناك مماسان مشتركان لفرعي المنحني لتلك النقطة.

وبالتالي هذه النقطة شاذة مضاعفة (لأنه يمر منها مرتين) .

◄**ملاحظة**: إذا عينت الدالة $y=\varphi(x)$ مجموعة نقاط الجماعة (1) الشاذة أس مجموعة النقاط المعرفة بالمعادلتين: $\frac{\partial\emptyset}{\partial y}=0$, $\frac{\partial\emptyset}{\partial x}=0$

عندئذ تحقق إحداثيات هذه النقاط جملة المعادلات (6) .

مثال: أوجد مغلف جماعة الدوائر : $(x-c)^2+y^2=R^2=0$

حيث c هو الوسيط و R هو نصف القطر.

الحل

نشتق بالنسبة لـc : $2(x-c)=0 \Rightarrow y=\pm R$

هاتان المعادلتان تمثلان المستقيمين و هو المغلف و هنا لا يوجد نقاط شاذة.

مثال: $x\cos\alpha+y\sin\alpha-7=0$

الحل

نشتق بالنسبة لـ α : $-x\sin\alpha+y\cos\alpha=0$

بحل المعادلتين : $y=P\sin\alpha$, $x=P\cos\alpha$

بالتربيع و الجمع نجد: $x^2+y^2=P^2$ تمثل معادلة الدائرة و هي تمثل مغلف لجماعة المستقيمات.

انتهت المحاضرة الأخيرة

إعداد: بسمة نصر الله وياسين الحلبي ورهف النقشي