نظري

◄ دكتور المادة: ريما القمحة

◄المحاضرة: الثالثة عشر   عنوان المحاضرة: sequences

بعض المفردات هامة لفهم النص

Sequences	متتاليات	Divergent	متباعدة
Limit	نهاية	Bounded	محدودة
Numerical	عددية	Monotone	مطردة
Remarkable	شهيرة	Description	وصف
General term	الحد العام	Inequalities	متراجحات
Formula	صيغة	limit	نهاية
Strict	أكثر تأكيد (دقة أكثر)	Infinitesimal	لا متناهية في الصفر
series	سلسلة – متسلسلة	Infinite value	قيمة غير منتهية
Approximate	تقريب	Notation	رمز
Unrestrictedly	بشكل غير مقيد	Infinity	لا نهاية
Increase	متزايد	On the contrary	من جهة أخرى
Congruent	متقاربة	Record	يسجل
Decrease	متناقص	canceling	اختزال – اختصار
meaningless	عدم تعيين	Argument	وسيط
Tend	يسعى	Not adopting	لم يأخذ
Approaches	يسعى	Valid	صحيح
fraction	كسر	unboundedly	غير محدودة
Substituting	تعويض	discontinuity	غير مستمر

Sequences , Limits of numerical sequences , Some remarkable limits

Numerical sequences , General term of a sequences .

General term formula . Limits of numerical sequence .

Convergent sequences , Divergent sequences , Bounded sequences.

Monotone sequences , Weiestrass's theorem.

Basic properties of limits . Some remarkable limits.

Sequences : Consider the series of natural numbers : 1,2,3,4,...n-1,n,.... If to change each natural number n in this series by some number u_n , following to some law , we'll receive a new series of numbers:

$$u_1, u_2, \dots . u_{n-1}, u_n, ..$$

Marked shortly as $\{u_n\}$ and called a *numerical sequence .*

A value u_n is called a general term of a sequence. Usually a numerical sequenceis given by some formula $u_n = f(n)$, permitting to find any term of the sequence by its number n; this formula is called a general term formula . Note, that it is not always possible to give the numerical sequences by a general term formula ; sometimes a sequence is given by description of its terms (see below the last example).

Examples pf numerical sequences :

1,2,3,4,5,.... –a series of natural numbers ;

2,4,6,8,10,.... – a series of even numbers;

1.4, 1.41 , 1.414 , 1.4142 ,...... - a numerical sequence of approximate , defined more precisely value of $\sqrt{2}$

For the last sequence it is impossible to give a general term formula , nevertheless this sequences is described completely .

Limit of numerical sequence . Consider a numerical sequence , a general term of wich approaches to some number a at increasing an ordinal number n . in this case we say , that the numerical sequence has a limit.

This notation has a more strict definition : A number a is called a limit of a numerical sequence $\{u_n\}$:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = a$$

if and only if for any $\varepsilon > 0$ one can find such a number N=N(ε), depending on ε, that $|u_n - a| < \varepsilon$ at n>N.

This definition means, that a is a limit of a numerical sequence , if its general term approaches unrestrictedly to a at increasing n. Geometrically it means, that for any $\varepsilon > 0$ it's possible to find such a number N , that beginning from n>N all terms of the sequence are placed within an interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

A sequence , having a limit , is called convergent ; otherwise – a divergent sequence.

A sequence is bounded, if such a number M exists that $|u_n| \leq M$ for all n. increasing and decreasing sequence are called monotone sequence.

Weierstrass's theorem. Each monotone and bounded sequence has a limit.

Basic properties of limits. The below mentioned properties of limits are valid not only for numerical sequence , but also for functions.

Limits of functions

Limit of a function . Some remarkable limits.

Infinitesimal and infinite values . Finite limit.

Infinite limit. Nation of an infinity .

Limit of a function . A number L is called a limit of a function y=f(x) as x tends a :

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

If and only if for any $\varepsilon > 0$ one can find such a positive number $\delta = \delta(\varepsilon)$, depending on ε, that |x-a|<δ imples that $|f(x) - L| < \varepsilon$

This definition means , that L is a limit of a function y=f(x), if the function value approaches unrestrictedly to L, When the argument value x approaches a .Geometrically it means , that for $\varepsilon > 0$ it is possible to find such a number δ , that if x is within an interval $(a - \delta, a + \delta)$, then a function value is within an interval $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Note , that according to this definition , a function argument x only approaches a , not adopting this value! it must be considered at calculating limit of any function at a point of is discontinuity (i.e , where this function doesn't exist)

Example . Find : $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$

Solution: Substituting x=3 into the expression $\frac{x^2-9}{x-3}$ we 'll receive a meaningless expression $\frac{0}{0}$ (see "about meaningless expressions" in the section " Powers and roots" of the part"algebra") . Therefore we'll solve in a different way:

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = x + 3$$

Here the fraction canceling is valid , because x≠ 3, it only approaches 3 now we have :

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3}(x + 3) = 6$$

Because , if x approaches 3 , then x+3 approaches 6.

Sone remarkable limits

$$\lim_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1 \; ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{tanx}{x} = 1 \quad ; \lim_{x \to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Infinitesimal and infinite value . If limit of some variable is equal to 0 , this variable is called an infinitesimal.

Example : The function $y = \sqrt{x + 5}$ -3 is an infinitesimal , if x approaches 4 , because $\lim_{x \to 4} \sqrt{x + 5} \; - 3 = 0$.

If an absolute value of some variable increases unboundedly , then this variable is called an infinite value

Example : the function $\frac{x+1}{x-3}$ is an infinite value , if x approaches 3 .

An infinite value has no a finite limit , but it has so called an infinite limit l this fact is written as :

$$\lim_{x \to 3} \frac{x + 1}{x - 3} = \infty$$

The symbol ∞"infinity " doesn't mean some number , it means only that the fraction increasing unboundedly if x approaches 3. It should be noted , that the fraction ca be both positive (at x>3) and negative (at x<3). If an infinite value can be only positive at any values of x, it is marked in a record . For example , at x→ 0 the function $y = x^{-2}$ is an infinite value , but it is positive both at x>0 and at x<0 ; this is expressed as :

$$\lim_{x \to 0} x^{-2} = +\infty$$

On the contrary , the function y=$-x^{-2}$ always negative , therefore$\lim_{x \to 0} -x^{-2} = -\infty$

According to this , a result pf our example can be written as :

$$\lim_{x \to 3} \frac{x + 1}{x - 3} = \pm\infty$$

الترجمة :

المتتاليات . نهاية متتالية عددية. بعض النهايات الشهيرة

المتتاليات العددية. الحد العام للمتتالية

صيغة الحد العام. نهاية المتتالية العددية

المتتالية المتقاربة. المتتالية المتباعدة . المتتالية المحدودة

المتتالية المطردة . نظرية ويرستراس

الخواص الأساسية للنهايات . بعض النهايات الشهيرة

المتتاليات: لتكن لدينا سلسلة من الأعداد الطبيعة ....,1,2,...,n-1,n إذا بدلنا كل عدد طبيعي n في هذه السلسلة بعدد ما u_n و بالتالي باستخدام بعض القوانين ، سنحصل على سلسلة جديدة من الأعداد :

$$u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_n, \ldots$$

و يرمز لها باختصار بـ $\{u_n\}$ و تدعى متتالية عددية .

-إن القيمة u_n تدعى بالحد العام للمتتالية . عادة تعطى المتتالية العددية بصيغة ما $u_n = f(n)$ تسمح بإيجاد أي حد من المتتالية عن طريق العدد n . هذه الصيغة تدعى الحد العام للمتتالية . لاحظ أنه ليس من الممكن دائماً إعطاء المتتالية العددية بواسطة الحد العام ، في بعض الأحيان تعطى المتتالية بواسطة وصف لحدودها (انظر المثال الأخير في الأسفل)

أمثلة لمتتاليات عددية :

....,1,2,3,4 هي متتالية الأعداد الطبيعية .

....,2,4,6,8 هي متتالية العداد الزوجية .

......,1.4,1.41,1.414,1.4142هي متتالية عددية للتقريب ، تعرّف قيمة $\sqrt{2}$بدقة أكبر (دقة تامة).

-من أجل المتتالية الأخيرة من المستحيل إعطاء صيغة الحد العام إلا إذا كانت هذه المتتالية معرفة بشكل تام .

نهاية متتالية عددية :

لتكن لدينا متتالية عددية ، حدها العام و الذي يسعى لعدد ما a عند تزايد العدد الطبيعي n. في هذه الحالة نقول أن المتتالية لعددية لها نهاية . هذا الترميز له تعريف آخر أكثر دقة و هو : يدعى العدد a نهاية المتتالية العددية $\{u_n\}$ حيث :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = a$$

إذا و فقط إذا أياً كان $0 < \varepsilon$ يمكننا إيجاد عدد مثل $N = N(\varepsilon)$ متعلق بـ ε بحيث يحقق الشرط $|u_n - a| < \varepsilon$ عند $n > N$.

هذا التعريف يعني، أن a هي نهاية المتتالية العددية إذا كان حدها العام يسعى إلى a بشكل غير مقيد عندما تزداد قيمةn .

-هندسياً يعني أنه من أجل أي $\varepsilon > 0$ يمكن إيجاد عدد ما N ة الذي يبدأ من $n > N$ و جميع حدود المتتالية متوضعة ضمن المجال $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$

-المتتالية التي تملك نهاية تدعى متقاربة ، خلاف ذلك فإنها تدعى متتالية متباعدة . تكون المتتالية محدودة ، إذا وجد عدد مثل M بحيث يكون $|u_n| \leq M$ من أجل قيم n .

-تدعى المتتاليات المتزايدة و المتناقصة بالمتتاليات المطردة.

-**نظرية واستراس** : كل متتالية مطردة و محدودة لها نهاية .

الخواص الأساسية للمتتاليات :

الخواص المشار إليها أدناه للنهايات صحيحة ليست فقط للمتتاليات العددية و لكنها أيضاً صحيحة من أجل الدوال

نهايات الدوال . بعض النهايات الشهيرة

القيم اللامتناهية في الصغر و اللامتناهية. النهاية المحدودة

النهاية غير المحدودة . مصطلح (ترميز) اللانهاية.

نهاية الدالة: يدعى العدد L نهاية الدالة y=f(x) عندما تسعى x إلى a حيث : $\lim_{x\to a} f(x) = L$

إذا و فقط إذا كان من أجل أياً كان $\varepsilon > 0$ يمكن إيجاد عدد موجب مثل $\delta = \delta(\varepsilon)$ متعلق بـ ε حيث $|x - a| < \delta$ يؤدي إلى أن $|f(x) - L| < \varepsilon$

هذا التعريف يعني ، أن L هو نهاية الدالة y=f(x) إذا كانت قيمة الدالة تسعى بشكل كبير غير مقيد إلى L ، عندما تكون قيمة الوسيط x تسعى إلى a . هندسياً تعني ، أنه لأجل أي $\varepsilon > 0$ من الممكن إيجاد عدد مثل δ بحيث إذا كانت x داخل المجال $(a - \delta, a + \delta)$ ، عندها قيمة الدالة تقع داخل المجال $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. لاحظ أنه وفقاً لهذا التعريف وسيط الدالة x يسعى فقط إلى a ، دون أن يساويها . و يجب أن نأخذ بعين الاعتبار عند حساب نهاية أي دالة عند نقطة عدم استمرارها (أي حيث تكون هذه الدالة غير معرفة (موجودة))

مثال : أوجد $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$

الحل: بتعويض x=3 في التعبير $\frac{x^2-9}{x-3}$ سنحصل على حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$ (راجع حالات عدم التعيين في قسم القوة و الجذور في قسم الجبر)

لذلك سنحلها بطريقة مختلفة

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x - 3} = x + 3$$

هنا يوجد اختزال (اختصار) صحيح للكسر لأنه $x \neq 3$ لكنها فقط تسعى إلى 3

الآن لدينا :

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)=6$$

لأنه إذا كانت x تسعى إلى 3 فإن $x+3$ تسعى إلى 6 .

بعض النهايات الشهيرة :

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=1\ ;\quad \lim_{x\to 0}\frac{tanx}{x}=1\quad ;\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

القيمة اللامتناهية في الصغر و القيمة اللامتناهية :

إذا كانت نهاية متحول ما تساوي 0 و، يدعى هذا المتحول اللامتناهي في الصغر

مثال: الدالة $y=\sqrt{x+5}-3$ هي دالة لامتناهية في الصغر إذا كانت x تسعى إلى 4 لأن :

$$\lim_{x\to 4}\sqrt{x+5}-3=0$$

إذا كانت القيمة المطلقة لمتحول ما تزداد بشكل غير محدود، عندها يدعى هذا المتحول قيمة لامتناهية

مثال: $\frac{x+1}{x-3}$هي قيمة لامتناهية إذا كانت x تسعى إلى 3

القيمة غير محدودة ليس لها نهاية محدودة . و لكن لها ما يدعى بالنهاية غير المحددة و هذه الحقيقية تكتب بالشكل :

$$\lim_{x\to 3}\frac{x+1}{x-3}=\infty$$

-الرمز ∞ (لا نهاية) لا يعني عدد ما ، إنه يعني فقط أن الكسر يتزايد بشكل غير محدود إذا كانت x تسعى إلى 3 . يجدر ملاحظة أن الكسر ممكن أن يكون بآن واحد موجب عندما تكون $x>3$ و سالب عندما تكون $x<3$

-إذا كانت قيمته غير محدودة ممكن أن تكون موجبة لأي قيمة لـx فإننا نسجلها على سبيل المثال : عندما $x\to 0$ الدالة $y=-x^{-2}$ هي قيمة لا متناهية لكنها موجبة في كلا الحالتين عندما $x>0$ و $x<0$.

و يعبر عنها كالتالي : $\lim_{x\to 0}x^{-2}=+\infty$

من جهة أخرى الدالة $t=-x^{-2}$ تكون دائماً سالبة و منه $\lim_{x\to 0}-x^{-2}=-\infty$ وفقاً لذلك يمكن أن نكتب بالشكل :

$$\lim_{x\to 3}\frac{x+1}{x-3}=\pm\infty$$

انتهت المحاضرة

إعداد: سهى العلي – نذير تيناوي