الاثنين ١٢/ محرم/ ١٤٣٩ هـ
٢/ تشرين(١١)/ ٢٠١٧ م

المحاضرة الأولى

مفردات المقرر ومحتواه

١- مبرهنة Cayley - hamilton
تمهيديات Nakayamma
السلاسل التامة على الموديولات منتهية التوليد
2- التموضع Locatization
3- شروط انقطاع السلاسل
4- التحليل الابتدائي
5- تمديدات الحلقات والحلقات الصحيحة
مبرهنات going up
Integral Ring going down
Ring Extension
6- الحلقات الموثرية الناظمية
مبرهنة هلبرت للأصفار Null stellen satz

مراجعة

١-١ الموديولات منتهية التوليد والمتتاليات التامة

تعريف ١: لتكن R حلقة واحدية تبديلية و M مجموعة غير خالية
مزودة بقانوني تشكيل الاول داخلي $+ : M \times M \longrightarrow M$

$(m,n) \longrightarrow m+n$

والثاني خارجي $\cdot : R \times M \longrightarrow M$

$(r,m) \longrightarrow rm$ مجموعة مؤثراته R

نسمي الثلاثية $(M,+,\cdot)$ موديول على R ونرمز له R_Modol

Galaxy
١

اذا تحقق كل من الشروط التالية .

* $(M,+)$ زمرة تبديلية

* $r(n+m) = rn + rm$ الخاصة التوزيعية .

$(r+s)m = rm + sm$

* $m(rs) = (mr)s$.

* $1_R\, m = m$. $\forall r,s \in R \quad m,n \in M$.

تعريف -2- M هو R-modol ، ولتكن $\phi \neq N \subseteq M$

نقول عن N انه موديول جزئي من M اذا كان

موديول على R بحد ذاته ونرمز له $N \leq M$

N _ sub modol.

تعريف -3- M موديول على R و $\phi \neq J \subseteq M$

ان الموديول الجزئي المولد بالمجموعة J بالشكل

$$\langle J \rangle = \cap N = \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i m_i \; ; r_i \in R \quad m_i \in J \quad n \in N \right\}$$

$J \subseteq N \leq M$.

تعريف -4- M هو R-modol يكون منتهي التوليد على R اذا وجدت

$\exists m_1, m_2 ---- m_n \in M$ مجموعة منتهية

$$\langle m_1, m_2 ---- m_n \rangle = M$$

تعريف -5- M, N موديولات على R يسمى التطبيق $\phi : M \longrightarrow N$

بالتشاكل الموديولي ونرمز له R _linear

اذا تحقق الشرطين التاليين

$$\phi(m_1+m_2) = \phi(m_1) + \phi(m_2)$$

$$\phi(rm) = r\,\phi(m).$$

أي الشرط $\phi(rm_1+sm_2) = r\phi(m_1) + s\,\phi(m_2)$.

ونرمز لمجموعة كل التشاكلات الموديولية المعرفة على R

بالرمز $\mathrm{Hom}_R(M,N)$.

Galaxy

تعريف 6: ليكن $\varphi: M \longrightarrow N$ هو R_linear عندئذ نواة التشاكل

$$Ker(\varphi) = \varphi^{-1}(0) = \{ m \in M \quad \varphi(m) = 0 \}$$

تعريف 7: M مودول على R و $N \leq M$ نعرف على زمرة القسمة $(M/N, +)$ قانون التشكيل الخارجي $R \times M/N \longrightarrow M/N$:

$$(r, \bar{m}) \longrightarrow \overline{rm}$$

عندئذ الثلاثية $(M/N, +, \cdot)$ تمثل مودول القسمة على R

ملاحظة: اذا كان φ متباين $\Leftrightarrow$ $ker(\varphi) = 0$

φ غامر $\Leftrightarrow$ $Coker(\varphi) = \frac{N}{Im\varphi}$ مقابل التشاكل

في حال كان $N = Im\varphi$ فإن

$$Coker(\varphi) = \bar{0}$$

امثلة: 1) كل حلقة تبديلية واحدية تكون مودول على نفسها

2) $I \trianglelefteq R$ عندئذ تكون I هي R_submodel

والعكس غير صحيح لان المثالي له قانون تشكيل داخلي والمودول له قانون تشكيل خارجي

3) R, S حلقات واحدية تبديلية و $\varphi \in Hom(R, S)$

ان M هو S_model

هل M هو R_model

4) ان $(M, +)$ زمرة تبديلية

هل M هو Z_model

تعريف 8: ليكن N, M, P كل منهم مودول على R ولتكن المتتالية $P \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} M$ من R_linear تسمى متتالية تامة اذا تحقق $Im\,\varphi = ker\,\psi$

اذا كانت $M_1, M_2 \ldots\ldots M_n$ موديولات على R

ان المتتالية $M_1 \xrightarrow{\varphi_1} M_2 \xrightarrow{\varphi_2} \cdots \xrightarrow{\varphi_{i-2}} M_{i-1} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} M_i \xrightarrow{\varphi_i} \cdots \xrightarrow{\varphi_{n-1}} M_n$

من R-linear تكون تامة اذا تحقق

$\operatorname{Im}\varphi_i = \ker\varphi_{i+1} \quad \forall\ 1 \le i \le n$

أمثلة: (١) $* \quad M \xrightarrow{\varphi} N \longrightarrow 0$

تكون المتتالية * تامة اذا كان φ غامر.

(٢) $\# \quad 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} N$

تكون المتتالية # تامة اذا كان φ متباين

(٣) $\$ \quad 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} P \longrightarrow 0$

تكون المتتالية \$ تامة اذا تحقق

φ متباين و ψ غامر

و $\ker\psi = \operatorname{Im}\varphi$

متباين قانوني — غامر قانوني

(٤) $0 \longrightarrow \ker\varphi \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} N \longrightarrow \operatorname{Im}\varphi \longrightarrow 0$

تامة بدون شروط

(٥) $0 \longrightarrow \ker\varphi \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} N \longrightarrow \operatorname{Coker}\varphi \longrightarrow 0$

تامة بدون شروط

(٦) $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$

متى تكون هذه المتتالية تامة ؟؟

تكون هذه المتتالية تامة اذا كانت بالشكل

$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$

انتهت المحاضرة الأولى.

ليس بوسع أحد أن يبلغ الفجر.... قبل المرور بطريق الظلام

المحاضرة الثانية

الأربعاء ١٤ محرم ١٤٣٩ هـ
٤ تشرين (١١) ٢٠١٧ م

الفصل الأول:

(1) مبرهنة Cayley-Hamilton

ليكن $M \neq \{0\}$ هو R-modol منتهي التوليد و $I \trianglelefteq R$ وحقق $I \subseteq J(R)$ وليكن $\varphi \in Hom(M,M)$ بحيث $\varphi(M) \subseteq IM$

فإنه يوجد حدودية $\psi_\varphi(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$

تحقق $\psi_\varphi(\varphi) = 0$ $\forall a_i \in I^i$

عرفنا الحدودية بـ x وليس بـ $f(x)$ وذلك لأنها تنتمي إلى M و M هو موديول وليس حدودية.

بما أن M موديول منتهي التوليد فإنه يوجد

$M = \langle m_1, m_2, \dots, m_n \rangle$; $m_n \in M$

نعرف M كموديول R[x]-modol بالشكل M

$m = \varphi(m)$

أي عدد عناصر الموديولات يساوي إلى درجة الحدودية.

$\forall j \in \{1,2,\dots,n\}$ $\varphi(m_j) = x m_j \in \varphi(M)$

; $\varphi(M) \subseteq IM$

باستخدام ★ بالشكل التفصيلي نعود إلى السطر الذي يسبقها

$= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} m_j$; $a_{ij} \in I$

$\Rightarrow x m_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ij} m_j = 0$

$$\star \quad (x I_n - A)\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad A = (a_{ij})$$

I_n مصفوفة واحدية

$$adj(x I_n - A)(x . I_n - A)\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Galaxy

الأربعاء ١٤ محرم ١٤٣٩ هـ — المحاضرة الثانية

٤ تشرين الثاني ٢٠١٧ م

الفصل الأول:

(1) مبرهنة Cayley-Hamiltion

لتكن $M \neq \{0\}$ هو R-modol منتهي التوليد و $I \trianglelefteq R$ ولتحقق $I \subseteq J(R)$ ولتكن $\varphi \in Hom(M,M)$ حيث $\varphi(m) \subseteq IM$

فإنه يوجد حدودية [illegible] $= x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ [illegible] I^i

تحقق $\psi_\varphi(\varphi) = 0$

بما أن M موديول منتهي التوليد فإنه يوجد

$\exists m_1, m_2, \dots, m_n \in M$; $M = \langle m_1, m_2, \dots, m_n \rangle$

نعرف M كموديول $R[x]$-modol بالشكل $R[x] \times M \longrightarrow M$

$(x, m) \longrightarrow xm = \varphi(m)$ ، أن عدد عناصر المولدات يساوي إلى درجة الحدودية.

$\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$ $\quad \varphi(m_j) = x m_j \in \varphi(M)$

$; \varphi(M) \subseteq IM$

$x m_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} m_j \qquad ; a_{ij} \in I$

$\Rightarrow \quad x m_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ij} m_j = 0$

$$\star \ (x I_n - A)\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \ A = (a_{ij})$$

I_n مصفوفة واحدية

$$adj(x I_n - A)(x . I_n - A)\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Galaxy

Scanned by CamScanner

/ /

$$\Rightarrow \det(xI_n - A)\begin{pmatrix} m_1\\ m_2\\ \vdots \\ m_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$$

$\forall j \in \{1,2,\dots,m\}$ $\quad \det(xI_n - A)\, m_j = 0$

وبما أن ذلك يتحقق جميع المولدات فإنه

$\forall m\in M$ $\quad \det(xI_n - A)\, m = 0$

وهي حدودية مميزة عندئذ

$\varphi_\varphi(x) = \det(xI_n - A) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \in R[x]$

$\forall a_i \in I^i$

$0 = \det(xI_n - A)\, m$

$= \varphi_\varphi(x)\, m$

$= \varphi_\varphi(\varphi)\, m$

$= (x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n)\, m$

ونطبق طابق وذلك عملا لأحد من الحدود

يوجد تماثل ومن عدد

وبالتالي وصلنا الى ان $\varphi_\varphi(\varphi) = 0$

نتيجة: M مودول منتهي التوليد و $\varphi\in Hom_R(M,M)$

اذا كان φ غامراً فإن φ متباين

$I = \langle x\rangle$ مثالي في $R[x]$

نعرف المودول M بالشكل $R[x]\times M \to M$

$(x,m) \to xm = \varphi(m)$

M مودول منتهي التوليد على R' حيث $R' = R[x]$

$id(M) = M = \varphi(M) = xM \subseteq IM$

وذلك حسب مبرهنة Cayley hamilton

أي سؤال دورة أكيد بصيغة اذا كانت φ غامر فإن φ تتباين

بشكل مشاركات وليس مساواة

نطبق معاكس

Galaxy

$\exists\ \varphi_{id}(y) = y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_n \in R'[y]$

$; \ \varphi_{id}(id) = 0$

$\forall m \in M$

$0 = \varphi_{id}(id)(m) = (id^n + a_1 id^{n-1} + \cdots + a_n)(m)$

$= (id + a_1 id + \cdots + a_n id)(m)$

$= (1 + a_1 + \cdots + a_n)\, id(m)$

$1 \le i \le n \qquad a_i \in I^i \subseteq I = \langle x \rangle$

$\Rightarrow \quad a_1, a_2, \ldots, a_n \in \langle x \rangle$

$\exists q(x) \in R[x] \ ; \ a_1 + a_2 + \cdots + a_n = x q(x)$

$0 = (1 + x q(x))\, m \Rightarrow m = -(xm)\, q(x)$

$id_m(m) = -(xm)\, \varphi(m)$

$id_m = -q(x) \cdot \varphi \Rightarrow$ φ متباين

سؤال هل عكس النتيجة صحيح اي انه اذا كان φ متباين فهو غامر ؟؟؟

تعريف: M هو R-modol نعرف عادم المودول M بأنه المثالي

$Ann_R(M) = \{ r \in R \ ; \ r M = \{0\} \} \trianglelefteq R$

٢- تمهيدية Nakayamms lemma

M مودول منتهي التوليد و $I \trianglelefteq R$ يحقق $I \subseteq J(R)$

فإذا كان $IM = M$ فإن $M = \{0\}$

لدينا من الفرض $IM = M = id_M(M)$ وحسب كيلي هاملتون

$\varphi_{id}(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \in R[x]$

$a_i \in I^i \qquad \varphi_{id}(id) = 0$

$0 = \varphi_{id}(id)(m) = (id^n + a_1 id^{n-1} + \cdots a_n id)(m)$

$= (a_1 + 1 + \cdots + a_n)(m)$

/ /

لنفرض $b = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

$; b \in J(R) \qquad 1 + b \in U(R)$

$\Rightarrow 0 = (1+b)(m)$

$\Rightarrow (1+b) \in Ann_R(M)$

بما أن $U(R) \ni 1+b$ فإنه $1 \in R = Ann_R(M)$

$\forall m \in M \qquad 1.m = m = 0$

$\Rightarrow M = \{0\}$

انتهت المحاضرة الثامنة.

حقاً...

الانتظار من دون أمل موت على قيد الحياة.

Galaxy

Scanned by CamScanner

المحاضرة الثالثة:

الاثنين ١٦ محرم ١٤٣٩ هـ

٩ تشرين (١) ٢٠١٧ م

٤ - تمهيدية Nak (1)

لتكن (R,μ) حلقة محلية و M هو R-مودول منتهي التوليد

فإذا كان $\mu M = M$ فإن $M=\{0\}$

بما ان (R,μ) حلقة محلية فإن $I = \mu = J(R)$ ← مثالي جاكوبسون

وحسب تمهيدية Nak الاساسية

يكون $M=\{0\}$.

٥ - تمهيدية Nak(2)

(R,μ) حلقة محلية و M هو R-modual منتهي التوليد و $N \leq M$

$N+\mu M=N$ فإن $M=N$

$$\mu(M/N) = \frac{\mu M + N}{N} = M/N$$

اذا كان المودول $\mu M = M \Leftrightarrow M=\{0\}$

منتهي التوليد ليس فإنه حسب $Nak(1)$ $M/N=\bar{0}$

بالضرورة ان يكون $\Rightarrow M=N$

المودول الجزئي

منتهي التوليد

العنصر الاصغري دوماً موجود اما العنصر الاصغر ليس بالضرورة ان يكون موجود.

٦ - تمهيدية Nak (3)

(R,μ) حلقة محلية و M هو R-مودول

منتهي التوليد فإذا كانت $\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$

مجموعة اصغرية بالنسبة لعدد العناصر مولدة للمودول M فإن

وفقط واذا $\{\bar{m}_1, \bar{m}_2, \dots, \bar{m}_n\}$ قاعدة للفضاء الاتجاهي

/ /

$M/\mu M$ يعرف على R/μ ـــ حقل لأن μ اعظمي

$\Leftarrow$ لنفرض ان $\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ مجموعة اصغرية

و $M/\mu M$ مولدة لـ $\{\bar{m}_1, \bar{m}_2, \dots, \bar{m}_n\}$ ولنفرض جدلاً

ان $\{\bar{m}_1, \bar{m}_2, \dots, \bar{m}_{i-1}, \bar{m}_{i+1}, \dots, \bar{m}_n\}$ مولدة لـ $M/\mu M$

ومنه فإن $\{m_1, m_2, \dots, m_{i-1}, m_{i+1}, \dots, m_n\}$ مولدة لـ M وهي اصغرية

وهذا يناقض كون $\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ اصغرية عندئذ

الفرض الجدلي خاطئ و المجموعة $\{\bar{m}_1, \bar{m}_2, \dots, \bar{m}_n\}$

قاعدة للفضاء الشعاعي $M/\mu M$

$\Rightarrow$ لنفرض $M/\mu M = \langle \bar{m}_1, \bar{m}_2, \dots, \bar{m}_n \rangle$ أصغر مجموعة مولدة

وليكن $N = \langle m_1, m_2, \dots, m_n \rangle$ للفضاء الشعاعي

ومنه $\dfrac{N+\mu M}{\mu M} = \langle \bar{m}_1, \bar{m}_2, \dots, \bar{m}_n \rangle$ تكون قاعدة له.

وقاعدة الفضاء الصفري هي ϕ

$$\Rightarrow \frac{N+\mu M}{\mu M} = \frac{M}{\mu M}$$

$$\Rightarrow N + \mu M = M$$

وبالتالي حسب $Nak(2)$

$$M = N = \langle m_1, m_2, \dots, m_n \rangle$$

ولنبرهن انها اصغرية

لنفرض جدلاً ان $\{m_1, \dots, m_{i-1}, m_{i+1}, \dots, m_n\}$ مولدة لـ M

عندئذ $\{\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_{i-1}, \bar{m}_{i+1}, \dots, \bar{m}_n\}$ مولدة لـ $M/\mu M$

وهذا يناقض كون $\{\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_n\}$ قاعدة

لـ $M/\mu M$ ومنه الفرض الجدلي خاطئ و $\{m_1, \dots, m_n\}$ اصغرية

/ /

٧- تمهيدية Nak(4)

(R,μ) حلقة محلية و $M \neq \phi$, N مودولات على R منتهية التوليد
و $\varphi \in Hom(M,N)$ حيث $\varphi : M \longrightarrow N$ غامر اذا!!
$\bar{\varphi} : M/_{\mu M} \longrightarrow N/_{\mu N}$ غامر

$$\bar{m} \longrightarrow \overline{\varphi(m)} = \varphi(m) + \mu M$$

$\boxed{\Leftarrow}$ لنفرض أن $\varphi : M \longrightarrow N$ غامر ولكن $\bar{n} = n + \mu N \in N/_{\mu N}$

$$n \in N \quad \exists\, m \in M \quad n = \varphi(m)$$

$$\exists\, \bar{m} \in M/_{\mu M} \quad \overline{\varphi(m)} = \bar{n} \Rightarrow \bar{\varphi} \text{ غامر}$$

$\boxed{\Rightarrow}$ لنفرض $\bar{\varphi} : M/_{\mu M} \longrightarrow N/_{\mu N}$ غامر عندئذ

$$\bar{0} = Coker(\bar{\varphi}) = \frac{N/\mu N}{Im\bar{\varphi}} = \frac{N + \mu N}{\mu N + Im\varphi/\mu N} \cong \frac{N}{Im\varphi + \mu N} = 0$$

$$\Rightarrow N = Im\,\varphi + \mu N$$

ومنه حسب Nak(2) $N = Im\,\varphi$

وبالتالي φ غامر ويتم المطلوب

تمرين: M هو R-modul منتهي التوليد اذا وجد $\varphi : R^n \longrightarrow M$
غامر

تعريف المتتالية المتناسقة القصيرة

لتكن P, N, M, M', M'' هي R-modols ونسمي المتتالية

التامة التالية $0 \to M \to N \to P \to 0$ قصيرة

ويسمى المتتالية التامة القصيرة التالية

$0 \to M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M'' \to 0$ انها

منشطرة إذا وجد تطبيق $j : M'' \to M$

يحقق $\psi \circ j = id_{M''} \vee j \circ \psi = id_M$

8- تمهيدية الافعى Snak's Lemma

ليكن لدينا المخطط التبادلي التالي من R-linear's حيث سطرين متتالية تامة عندئذ يوجد تطبيق R-liners

$$\delta : \ker \varphi'' \to \operatorname{Coker} \varphi'$$

حيث من اجله تكون المتتالية التالية تامة.

$$0 \to \ker\varphi' \to \ker\varphi \to \ker\varphi'' \xrightarrow{\delta} \operatorname{Coker}\varphi' \to \operatorname{Coker}\varphi \to \operatorname{Coker}\varphi'' \to 0$$

المخطط

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker\varphi' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "G"] & \ker\varphi \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "G"] & \ker\varphi'' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dddll, bend left, "\varepsilon"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi'"'] \arrow[dr, phantom, "G"] & M \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, phantom, "G"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\varphi''"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d] & N \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d] & N'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Coker}\varphi' \arrow[r, "\bar{\alpha}"] & \operatorname{Coker}\varphi \arrow[r] & \operatorname{Coker}\varphi'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

انتهت المحاضرة الثالثة

مخيفة هي ... سرعة الأيام