نظري

◄ دكتورة المادة: هدى شماط

◄ المحاضرة: التاسعة عشرة — عنوان المحاضرة: تركيب الحركات للجسم الصلب

أهلا بكم أصدقائي في محاضرة جديدة من الميكانيك سنبدأ اليوم ببحث جديد بعنوان تركيب الحركات للجسم الصلب ..

تركيب الحركات للجسم الصلب

لنفرض (s) جسم صلب

1- إن حركة الجسم الصلب (s) بالنسبة للجملة المتماسكة $(oxyz)$ **هي حركة نسبية** .

2- إن حركة الجسم الصلب (s) المتماسك مع الجملة المتماسكة $(oxyz)$ بالنسبة للجملة الثابتة $(o_1x_1y_1z_1)$ **هي حركة جرية** .

3- إن حركة الجسم الصلب (s) بالنسبة للجملة الثابتة $(o_1x_1y_1z_1)$ **هي حركة مطلقة** .

تركيب الحركات الخاصة

أولا : لنفرض أن الحركة النسبية هي حركة انسحابية $\overrightarrow{V_r}=\overrightarrow{V_1}$

والحركة الجرية هي حركة انسحابية $\overrightarrow{V_e}=\overrightarrow{V_2}$

عندئذ : $\overrightarrow{V_a}=\overrightarrow{V_1}+\overrightarrow{V_2}$ **<u>هي حركة انسحابية</u>** .

تنويه : تركيب انسحابين هو انسحاب .

تعميم :

تركيب (n) حركة انسحابية هو حركة انسحابية

$$\overrightarrow{V_a}=\overrightarrow{V_1}+\overrightarrow{V_2}+\cdots+\overrightarrow{V_n}$$

ثانيا : تركيب حركتين دورانيتين :

لنفرض بأن الحركة النسبية هي حركة دورانية حول محور (Δ_1) من جملة احداثية متماسكة مع الفراغ S وكان شعاع الدوران $\overrightarrow{\omega_1}$ ، وإذا تحركت الجملة S بالنسبة للفراغ S_1 بحركة دورانية ولتكن جرية حول محور (Δ_2) شعاع دورانها $\overrightarrow{\omega_2}$ فإن السرعة المطلقة لنقطة ما من الجسم تكتب كما يلي :

$$\forall\ M\in S\ \ :\overrightarrow{V_a}(M)=\overrightarrow{V_r}+\overrightarrow{V_e}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{V_a}(M)=\overrightarrow{\omega_1}\wedge\overrightarrow{o_1M}+\overrightarrow{\omega_2}\wedge\overrightarrow{o_2M}$$

حيث : $o_1\in\Delta_1$ و $o_2\in\Delta_2$

ولنميز الحالات التالية :

1- إذا كان (Δ_1) و (Δ_2) متلاقيان في نقطة ولتكن (o) ، عندها تصبح عبارة السرعة المطلقة :

$$\overrightarrow{V_a}(M)=\overrightarrow{\omega_1}\wedge\overrightarrow{oM}+\overrightarrow{\omega_2}\wedge\overrightarrow{oM}$$
$$\Longrightarrow \overrightarrow{V_a}(M)=(\overrightarrow{\omega_1}+\overrightarrow{\omega_2})\wedge\overrightarrow{oM}$$
$$\Longrightarrow \overrightarrow{V_a}(M)=\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{oM}$$

والحركة المحصلة هي حركة دورانية بسيطة شعاع دورانها $\vec{\omega}=\overrightarrow{\omega_1}+\overrightarrow{\omega_2}$, ويمر من نقطة تقاطع (Δ_1) **مع** (Δ_2) **وهي** (o) .

2- إذا كان $\Delta_1//\Delta_2$ و $(\overrightarrow{\omega_1}+\overrightarrow{\omega_2})\neq 0$

تكتب السرعة المطلقة في هذه الحالة كما يلي :

$$\overrightarrow{V_a}(M)=\overrightarrow{\omega_1}\wedge\overrightarrow{o_1M}+\overrightarrow{\omega_2}\wedge\overrightarrow{o_2M}$$

ولما كان : $\overrightarrow{\omega_1}//\overrightarrow{\omega_2}$ فإن $\overrightarrow{\omega_1}=\omega_1\vec{u}$ و $\overrightarrow{\omega_2}=\omega_2\vec{u}$

حيث $(\vec{u})$ شعاع الواحدة للمنحى المشترك ل (Δ_1) و (Δ_2)

$$\vec{u}=\frac{\overrightarrow{\omega_1}}{\omega_1}=\frac{\overrightarrow{\omega_2}}{\omega_2}\Longrightarrow\overrightarrow{\omega_2}=\frac{\omega_2}{\omega_1}\overrightarrow{\omega_1}$$

نعوض في عبارة السرعة المطلقة فنجد :

$$\overrightarrow{V_a}(M)=\overrightarrow{\omega_1}\wedge\overrightarrow{o_1M}+\frac{\omega_2}{\omega_1}\overrightarrow{\omega_1}\wedge\overrightarrow{o_2M}$$
$$\Longrightarrow \overrightarrow{V_a}(M)=\overrightarrow{\omega_1}\wedge\left(\overrightarrow{o_1M}+\frac{\omega_2}{\omega_1}\overrightarrow{o_2M}\right)$$
$$\Longrightarrow \overrightarrow{V_a}(M)=\frac{\overrightarrow{\omega_1}}{\omega_1}\wedge\left(\omega_1\overrightarrow{o_1M}+\omega_2\overrightarrow{o_2M}\right)$$
$$\Longrightarrow \overrightarrow{V_a}(M)=\vec{u}\wedge\left(\omega_1\overrightarrow{o_1M}+\omega_2\overrightarrow{o_2M}\right)\ \ldots.(*)$$

نعلم من علاقة مركز مجموعة نقط أنه إذا كان $(\overrightarrow{\omega_1}+\overrightarrow{\omega_2})\neq 0$ فإن :

$$\omega_1\overrightarrow{o_1M}+\omega_2\overrightarrow{o_2M}=(\omega_1+\omega_2).\overrightarrow{cM}\ \ ..(**)$$

حيث (c) مركز للنقطتين (o_1) و (o_2) وبالتعويض بعبارة السرعة $(*)$ نجد :

$$\Longrightarrow \overrightarrow{V_a}(M)=\vec{u}\wedge(\omega_1+\omega_2).\overrightarrow{cM}$$
$$\Longrightarrow \overrightarrow{V_a}(M)=\vec{u}\wedge\omega.\overrightarrow{cM}\Longrightarrow\overrightarrow{V_a}(M)=\omega\vec{u}\wedge\overrightarrow{cM}$$
$$\boxed{\Longrightarrow \overrightarrow{V_a}(M)=\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{cM}}$$

أي أن الحركة المحصلة هي حركة دورانية بسيطة حول محور (Δ) يمر من (c)

نحسب (c) تحليلياً من العلاقة $(**)$ بعد تعويض (M) بـ (c)

$$\omega_1\overrightarrow{o_1c}+\omega_2\overrightarrow{o_2c}=\underbrace{\omega\,.\overrightarrow{cc}}_{\vec{0}}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{o_1c}=-\frac{\omega_2}{\omega_1}\overrightarrow{o_2c}$$

بحيث :

$$o_2(x_2,y_2,z_2)\ ,\qquad o_1(x_1,y_1,z_1)\ ,\qquad c(x_c,y_c,z_c)$$

$$\Rightarrow (x_c-x_1,y_c-y_1,z_c-z_1)=-\frac{\omega_2}{\omega_1}(x_c-x_2,y_c-y_2,z_c-z_2)$$

بالمطابقة نجد :

$$x_c-x_1=-\frac{\omega_2}{\omega_1}(x_c-x_2)\Rightarrow x_c+\frac{\omega_2}{\omega_1}.x_c=x_1+\frac{\omega_2}{\omega_1}.x_2$$

$$\Rightarrow x_c\left(1+\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)=x_1+\frac{\omega_2}{\omega_1}x_2\Rightarrow x_c\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{\omega_1}\right)=x_1+\frac{\omega_2}{\omega_1}x_2$$

$$\Rightarrow x_c(\omega_1+\omega_2)=x_1\omega_1+x_2\omega_2$$

$$\boxed{\Rightarrow x_c=\frac{x_1\omega_1+x_2\omega_2}{\omega_1+\omega_2}}$$

وبنفس الخطوات نجد :

$$\boxed{y_c=\frac{y_1\omega_1+y_2\omega_2}{\omega_1+\omega_2}\quad ,\quad z_c=\frac{z_1\omega_1+z_2\omega_2}{\omega_1+\omega_2}}$$

3- إذا كان $\Delta_1 \parallel \Delta_2$ ولكن $\overrightarrow{\omega_1}+\overrightarrow{\omega_2}=\vec{0}$ ومنه $\overrightarrow{\omega_1}=-\overrightarrow{\omega_2}$

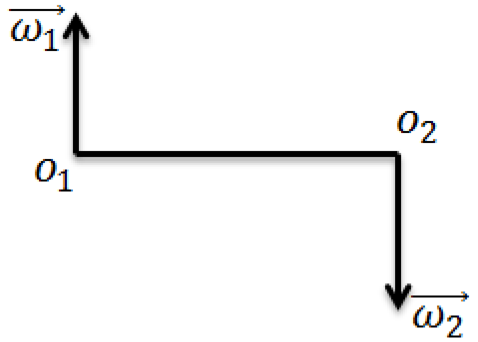
$$\overrightarrow{V_a}(M)=\overrightarrow{\omega_1}\wedge\overrightarrow{o_1M}+\overrightarrow{\omega_2}\wedge\overrightarrow{o_2M}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{V_a}(M)=\overrightarrow{\omega_1}\wedge\overrightarrow{o_1M}-\overrightarrow{\omega_1}\wedge\overrightarrow{o_2M}$$

$$\overrightarrow{V_a}(M)=\overrightarrow{\omega_1}\wedge\left(\overrightarrow{o_1M}-\overrightarrow{o_2M}\right)$$

$$\boxed{\Rightarrow \overrightarrow{V_a}(M)=\overrightarrow{\omega_1}\wedge\overrightarrow{o_1o_2}}$$

أي أن السرعة لا تتعلق بالنقطة M مما يدل على ان الحركة المحصلة هي حركة انسحابية وشعاع سرعتها الانسحابية هو عزم المزدوجة المؤلفة من $(\overrightarrow{\omega_1})$ و $(\overrightarrow{\omega_2})$ والذراع هو (o_1o_2) ، ومنحى الانسحاب يعامد مستوي المزدوجة



4- إذا كان $\Delta_2 \parallel \Delta_1$ و $(\overrightarrow{\omega_1})$ و $(\overrightarrow{\omega_2})$ متعاكسين مباشرة , (o_1) منطبقة على (o_2) عندها تصبح السرعة المطلقة معدومة

$$\overrightarrow{V_a}(M) = \overrightarrow{\omega_1} \wedge \overrightarrow{o_1 M} - \overrightarrow{\omega_1} \wedge \overrightarrow{o_1 M} = \vec{0}$$

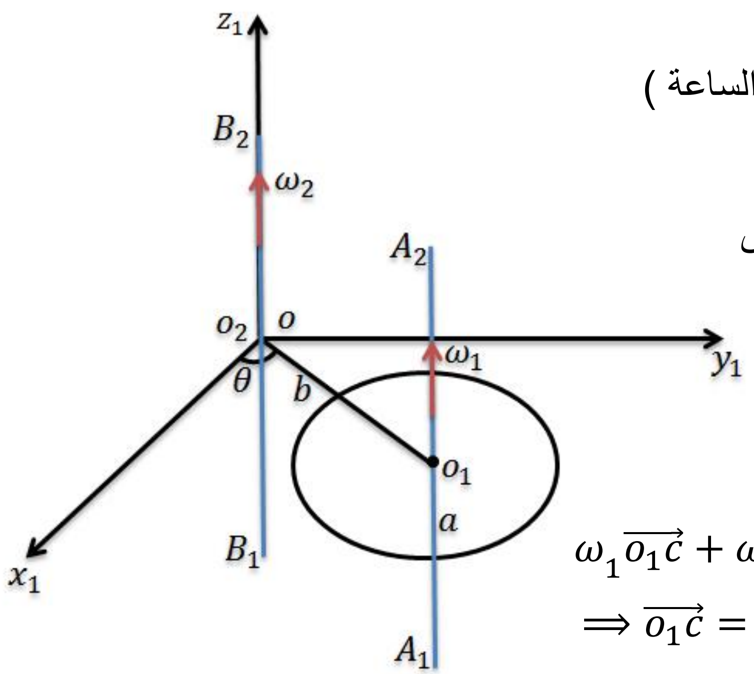
ومنه نقول إن محصلة دورانيين متعاكسين مباشرة هي ساكنة (سكون) .

مثال على ذلك : حركة العربة .

مثال

يدور قرص دائري نصف قطره (a) حول محوره الشاقولي (A_1A_2) بسرعة زاويّة ثابتة $(\overrightarrow{\omega_1})$ جهة الدوران بعكس عقارب الساعة ويدور (A_1A_2) حول محور شاقولي (B_1B_2) يبعد عنه بمقدار (b) بسرعة زاويّة ثابتة $(\overrightarrow{\omega_2})$ بعكس عقارب الساعة ، **والمطلوب** :
عين المحور الآني للدوران ، ونقطة تقاطعه مع القرص ، وشعاع الدوران الآني .

الحل



بما أن الدورانان متوازيان $(A_1A_2//B_1B_2)$
وبنفس الجهة أي $\overrightarrow{\omega_1} + \overrightarrow{\omega_2} \neq \vec{0}$ (عكس عقارب الساعة)
من نص المسألة أي أننا في الحالة الثانية
بفرض $o_1(x_1, y_1, z_1)$ و $c(x_c, y_c, z_c)$
و $o_2(x_2, y_2, z_2) = (0,0,0)$ لأنها مركز القرص

إيجاد تقاطع المحور الآني للدوران c :

$$\omega_1 \overrightarrow{o_1 c} + \omega_2 \overrightarrow{o_2 c} = 0$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{o_1 c} = -\frac{\omega_2}{\omega_1} \overrightarrow{o_2 c}$$

$$\Longrightarrow (x_c - x_1, y_c - y_1, z_c - z_1) = -\frac{\omega_2}{\omega_1}(x_c - 0, y_c - 0, z_c - 0)$$

بالمطابقة نجد :

$$\Longrightarrow x_c = \frac{x_1\omega_1}{\omega_1 + \omega_2}$$

وبما أن الحركة دائرية فنجد : $x_1 = b.\cos\theta \quad , \; y_1 = b.\sin\theta \quad , \; z_1 = 0$

$$\Longrightarrow x_c = \frac{(b.\cos\theta)\omega_1}{\omega_1 + \omega_2}, \quad y_c = \frac{(b.\sin\theta)\omega_1}{\omega_1 + \omega_2}, \qquad z_c = 0$$

طلب إضافي : أكتب سرعة أي نقطة من القرص

بفرض $M \in s$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{V_a}(M) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{cM}$$

دورانية بسيطة حول محور Δ يمر من c

المحور الآني للدوران $\vec{\omega}$ هو محصلة الدورانين : $\vec{\omega} = \overrightarrow{\omega_1} + \overrightarrow{\omega_2}$

يمر من المركز (c) للنقطتين (o_1) و (o_2)

$$\vec{\omega} = (\omega_1 + \omega_2)\vec{k}$$

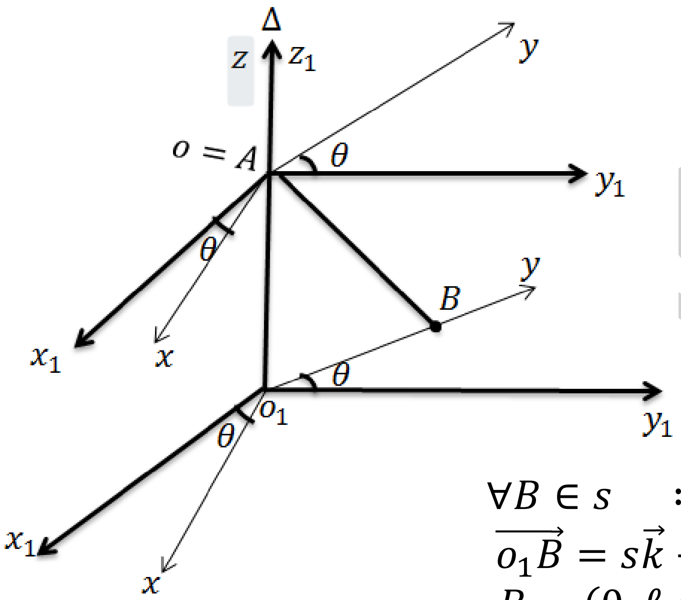
" مسألة وظيفة من المحاضرة السادسة التمرين الرابع "

AB قضيب طوله (ℓ) فيه نقطة (A) ترسم المحور $(o_1 z_1)$ والنقطة (B) تدور حول $(o_1 A)$ بسرعة زاويّة ثابتة (ω) بحيث يبقى $o_1 z_1 \perp AB$ ، المطلوب :

أوجد السرعة والمسار وتسارع (B) .

الحل

الحركة لولبية لأن ((A ترسم المحور $o_1 z_1$) أي لدينا انسحاب و (B تدور حول $o_1 A$) أي لدينا دوران



$$\forall B \in s \quad : \overrightarrow{o_1 B} = \overrightarrow{o_1 A} + \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{o_1 B} = s\vec{k} + x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

بفرض (B) ملازمة للمحور $(o_1 y)$ فتكون احداثيات $B = (0, \ell, 0)$

و A موجودة على المحور $o_1 z$ فتكون احداثياتها $A = (0,0,\ell)$

$$\overrightarrow{AB} = (0, \ell, -\ell)$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{o_1 B} = s\vec{k} + \ell\overrightarrow{\jmath_1} - \ell\vec{k}$$

بإسقاط $\vec{\jmath}$ على الجملة الثابتة ونعلم من نص المسألة أن $\vec{k} = \vec{k}_1$ فنجد :

$$\Longrightarrow \overrightarrow{o_1 B} = s\overrightarrow{k_1} - \ell.\sin\theta\,\overrightarrow{\imath_1} + \ell.\cos\theta\,\overrightarrow{\jmath_1} - \ell\vec{k}_1$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{o_1 B} = b.\theta\overrightarrow{k_1} - \ell.\sin\theta\,\overrightarrow{\imath_1} + \ell.\cos\theta\,\overrightarrow{\jmath_1} - \ell\vec{k}_1$$

بالإسقاط على المحاور الثابتة والمطابقة نجد :

$$x_1 = -\ell.\sin\theta \quad , y_1 = \ell.\cos\theta \quad , z_1 = s = b.\theta - \ell \, \ldots . (*)$$

لنوجد الزاوية θ

$$\theta = \int \omega\, dt = \omega t + \theta_0$$

في بداية الحركة : $\theta_0 = 0 \Leftarrow \theta = 0 \;,\; t = 0$

نعوض في المعادلات $(*)$:

$$\text{معادلة الحركة}\begin{cases} x_1 = -\ell.\sin \omega t & \dots(1) \\ y_1 = \ell.\cos \omega t & \dots(2) \\ z_1 = b(\omega t) - \ell \Rightarrow t = \dfrac{z_1 + \ell}{b.\omega} & \dots(3) \end{cases}$$

لإيجاد المسار نقوم بحذف الزمن من معادلات الحركة

وبتعويض كل من (3) في المعادلة (1) و (2) فنجد :

$$B\ \text{معادلات مسار النقطة}\begin{cases} x_1 = -\ell.\sin\left(\dfrac{z_1 + \ell}{b}\right) \\ y_1 = \ell.\cos\left(\dfrac{z_1 + \ell}{b}\right) \end{cases}$$

وبتربيع والجمع نجد :

$$\Rightarrow x_1^2 + y_1^2 = \ell^2$$

لإيجاد سرعة النقطة B نطبق القانون التالي :

$$\vec{V}(B) = s'\vec{k} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{oB}$$

$$\Rightarrow \vec{V}(B) = b.\theta'\vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & y = \ell & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{V}(B) = -\ell\omega\vec{\imath} + b\theta'\vec{k}$$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{V}(B) = -\ell.\omega\vec{\imath} + b.\omega\vec{k}}$$

لإيجاد التسارع نطبق العلاقة التالية :

$$\vec{\Gamma}(B) = s''\vec{k} + \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{oB} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}(B)$$

$$\Rightarrow \vec{\Gamma}(B) = b\theta''\vec{k} + \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{oB} + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -\ell\omega & 0 & b\omega \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{\Gamma}(B) = -\ell\omega^2\vec{\jmath}$$

انتهت المحاضرة

والنفس كالطفل إن تهمله شب على حب الرضاع وإن تفطمه ينفطم

إعداد: محمد علي فليون ** لمى حبشية