المحاضرة 18 بيانات الاثنين 16/12/2017

إذا كان s و t عددين صحيحين موجبين فالعدد الرمسي $R(s,t)$ يكون

أقل عدد صحيح موجب وليكن p بحيث يكون كل بيان بسيط عدد عقده p

$G=(V,E)$ و $|V|=p$ يحوي بيان K_s أو متمم $\bar{K}_t$

أي أن عدد رمسي لـ s و t هو p (عدد عقده)

أي إما $K_s \subseteq G$ و $K_t \subseteq \bar{G}$

أي عدد رمسي تعني البيان الذي عقده تساوي p يحتوي البيان K_s كبيان جزئي أو يحتوي t عقد مستقلة (غير متجاورة)

رمز: $u \in V$ كفري ، درجة العقدة $\deg(u)$ ، والعقدة $N(u)$ أو أكتبه

$\deg(u, G)$ أسماء العقدة هذه $N(u, G)$ لأي بيان تنتمي

مبرهنة:

لتكن لدينا البيان $G=(V,E)$ بيان بسيط $|V|=6$

فإن هذا البيان إما يحوي K_3 كبيان جزئي أو متممة K_3

الإثبات:

لتكن لدينا $u \in V$ ولدينا ~~deg (u)~~

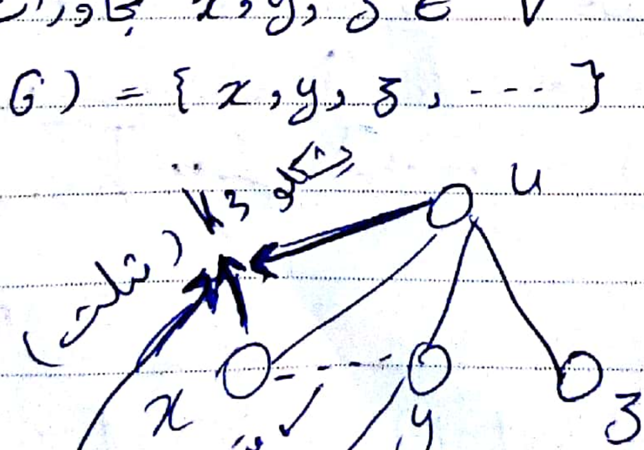
$\deg(u) = \deg(u, \bar{G}) + \deg(u, G) = 5$

إما: $\deg(u, G) \geq 3$ أو $\deg(u, \bar{G}) \geq 3$

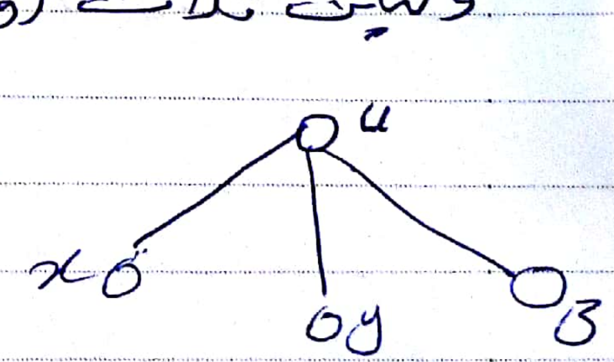
نفرض أن: $\deg(u, G) \geq 3$ (لا تؤثر على عمومية المسألة)

ولتكن ثلاث رؤوس $x, y, z \in V$ مجاورات للعقدة u

$N(u, G) = \{x, y, z, \dots\}$



(a)



(b)

الحالة (a): إذا كان هناك رأسين متجاورين x, y مثلاً عندئذ البيان G يحوي K_3

$K_3 \subseteq G$

إذا أي عقدة من العقدة الثلاثة ~~التجاور~~ ليست متجاورة (لا يوجد تجاور)

نستنتج أن أي 3 عقد مستقلات

$K_3 \subseteq \overline{G}$ أي $\overline{K_3} \subseteq G$

أي و K_3 سيكون في البيان الأصلي.

مبرهنة (2): ~~مهم~~ $\forall s, t \geq 1$ فإن $R(s,t) = R(t,s)$

واضحة من تعريف أعداد رمسي (أذكر التعريف)

- مبرهنة (3): $\forall s \geq 1$: $R(s,1) = 1$

واضحة لأن أي بيان تام يكفي يحوي K_1 بيان جزئي

- مبرهنة (4):

$R(s,2) = s \qquad \forall s \geq 1$

الإثبات:

ليكن G بيان بسيط $G = (V, E)$ (أضلاعه، عقده)

بحيث $|V| = s$ (عدد عقده) وغير تام

عندئذٍ البيان المتمم $K_2 \subseteq \overline{G}$ بيان جزئي

ومنه نستنتج أن: $R(s,2) \leq s$

لنثبت الآن أن: $R(s,2) \geq s$

وهذه واضحة لأن (1) أي بيان عدد عقده $s-1$ لا يمكن أن يحوي K_s كبيان جزئي (لأن عدد العقد مختلفة)

و (2) $\overline{K_{s-1}}$ متمم لا يحوي أي ضلع

---

* مبرهنة (5) بدون برهان: (Erdős)

أ) $R(s,t) \leq R(s-1,t) + R(s,t-1) \quad ; \forall s,t \geq 3$

ب) وإذا كان $R(s,t-1)$ و $R(s-1,t)$ عددان زوجيان

فإن: $R(s,t) < R(s-1,t) + R(s,t-1)$

حساب أعداد رمسي:

إن عملية إيجاد أعداد رمسي $R(s,t)$ ؛ $s,t \geq 3$

معقد جداً باستثناء الحالات القليلة (عندما تكون t و s صغيرة)

أي الحالات التي تكون فيها ① ($s=3$ و $3 \leq t \leq 9$) الحالات التي نعتبرها صغيرة

② ($s=4$ ، $3 \leq t \leq 9$)

* جدول أعداد رمسي في هذه الحالات:

s \ t	3	4	5	6	7	8	9
3	6	9	14	18	23	28	36
4	9	18	25	.	.	.	.

ليسوا معروفين

مبرهنة:

مثبت على أن: $R(3,4)=9$ أثبت ذلك

الإثبات:

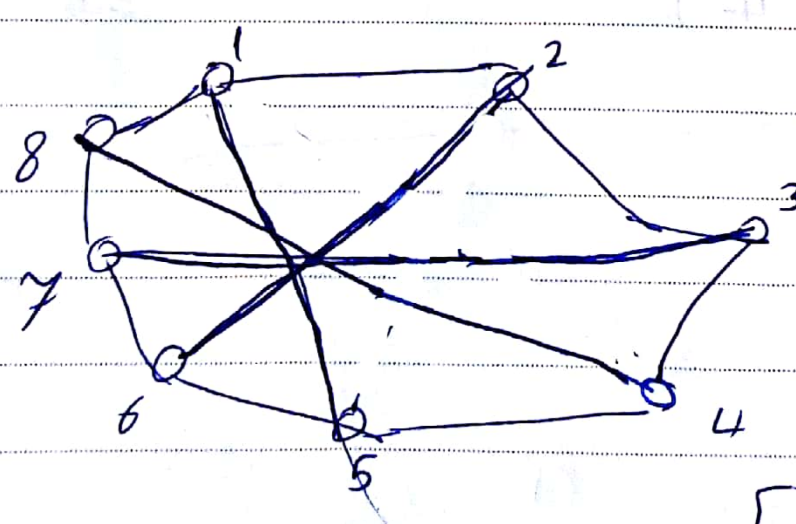
$R(3,3)=6$ (بالاعتماد على المبرهنة 1)

(من المبرهنة 4) ؛ $R(4,2)=4 \Leftarrow R(2,4)=4$ حسب المبرهنة (2)

(من المبرهنة 5 الحالة ب) $R(3,4)$

$$R(3,4) < \underset{(s,\,t-1)}{R(3,3)} + \underset{(s-1,\,t)}{R(2,4)}$$

نوجد البيان عدد عقده تمثل أصغر عدد صحيح بحيث لا يحوي K_3 بيان جزئي أو $\bar{K}_4$



هذا بيان بسيط يحتوي أكبر عدد من الأضلاع بحيث لا يحتوي $\bar{K}_4$ أو K_3 كبيان جزئي نستنتج أن:

$R(3,4) > 8$

ولدينا $R(3,4) < 10$

$R(3,4) = 9 \Leftarrow$

(يجب أن يكون عدد صحيح)

مبرهنة: أثبت أن $R(3,5)=14$

الإثبات: $R(3,4)=9$

$R(2,5)=5$ (حسب المبرهنة 4)

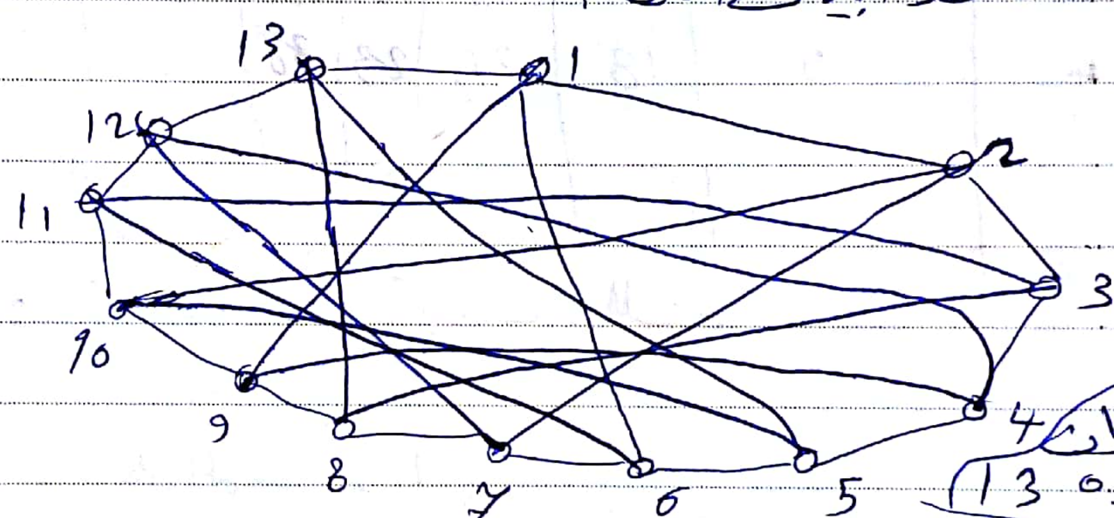
حسب المبرهنة (5) (2)

$$R(3,5) \le R(2,5) + R(3,4) = 9+5=14$$

$$R(3,5) \le 14$$

لنثبت أن $R(3,5) \geq 14$

لنأخذ البيان التالي:



هذا البيان عدد رؤوسه 13

له أكبر عدد من الأضلاع

~~هذا البيان~~ لا يحوي K_5 أو K_3 كبيان جزئي

~~عدد رؤوسه 13~~ و إضافة أي عقدة تفقده الخاصية

نستنتج أنه:

$$\left.\begin{array}{l} R(3,5) > 13 \\ R(3,5) \le 14 \end{array}\right] \Rightarrow R(3,5)=14$$

انتهى

بيان الباشا