المحاضرة 6 — الاثنين 23/10/2017

تمرين:

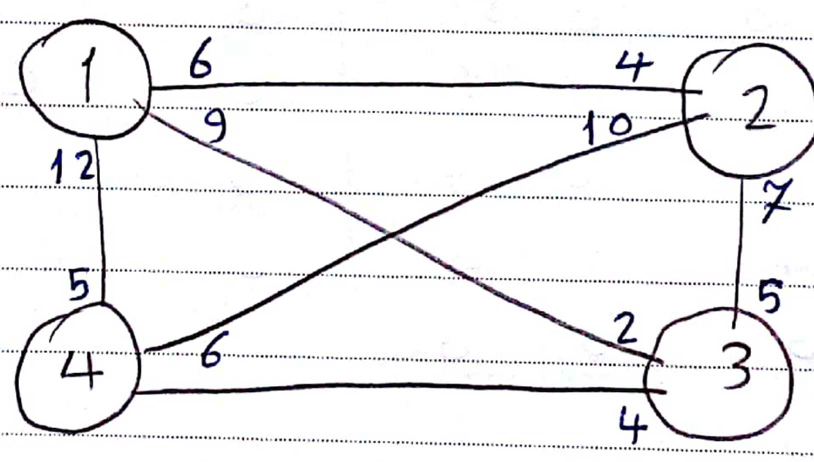
ارسم البيان الموافق لهذه المصفوفة

ثم أوجد دائرة هاملتون الأصغرية

$$\begin{array}{c|cccc|c}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & \\
\hline
1 & \infty & 4 & 2 & 5 & 2 \\
2 & 6 & \infty & 5 & 6 & 5 \\
3 & 9 & 7 & \infty & 3 & 3 \\
4 & 12 & 10 & 4 & \infty & 4 \\
\hline
 & 1 & 2 & 0 & 0 &
\end{array}$$

$C = 17$

الحل:



$$D_0 = \begin{array}{c|cccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
1 & \infty & 0 & 0 & 3 \\
2 & 0 & \infty & \infty & 1 \\
3 & 5 & 2 & \infty & 0 \\
4 & 7 & 4 & 0 & \infty
\end{array}$$

نشكل المجموعتين:

- $\{\overline{(2,1)}\} \subseteq Y_0'$
- $\{(2,1)\} \subseteq Y_0''$

$(1,2), (1,3), (2,1)$

$(2,3), (3,4), (4,3)$

$w_{12} = 2$

$w_{13} = 0$

$w_{21} = 5$

$w_{23} = 0$

$w_{34} = 3$

$w_{43} = 4$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
D_0' = & \left[\begin{array}{cccc} \infty & 0 & 0 & 3 \\ \infty & \infty & 0 & 1 \\ 5 & 2 & \infty & 0 \\ 7 & 4 & 6 & \infty \end{array}\right] \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \\
 & \begin{array}{cccc} 5 & 0 & 0 & 0 \end{array}
\end{array}
\qquad C_0' = 17 + 5 = 22
$$

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \end{array} \\
D_0'' = & \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \left[\begin{array}{ccc} \infty & 0 & 3 \\ 2 & \infty & 0 \\ 4 & 0 & \infty \end{array}\right] \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \\
 & & \begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0 \end{array}
\end{array}
\qquad C_0'' = 17 + 2 = 19
$$

$w_{13} = 3$, $w_{32} = 2$, $w_{34} = 2$

نأخذ ال Max أي $w_{13} = 3$

$\{(1,3), (2,1)\} \subseteq V_1'$

$\{(1,3), (2,1)\} \subseteq V_1''$

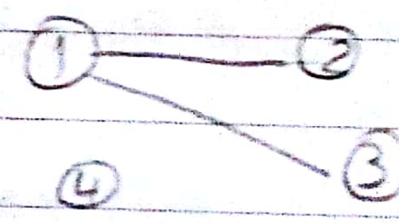
$$D_1 = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} \infty & \infty & 3 \\ 0 & \infty & 0 \\ 2 & 0 & \infty \end{bmatrix} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \\ & \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \end{array} \end{array}$$

$$D_1' = \begin{bmatrix} \infty & \infty & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & \infty & \infty \end{bmatrix} \qquad C_1' = 19 + 3 = 22$$

$$D_1'' = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} 2 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 2 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & \infty \end{bmatrix} \begin{array}{c} 0 \\ 2 \end{array} \\ & \begin{array}{cc} 0 & 0 \end{array} \end{array} \qquad C_1'' = 19 + 2 = 21$$

$$\text{Min}\,\{ C_1', C_1'', C_0' \} = C_1''$$

$$D_2 = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} 2 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 2 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \infty \end{bmatrix} \end{array}$$



يجب إلغاء الضلع ② و③ لأن الدائرة تصبح لا تمر بجميع العقد

$$D_2 = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} 2 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 2 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} \infty & 0 \\ 0 & \infty \end{bmatrix} \end{array}$$

$w_{34} = \infty \qquad w_{42} = \infty$

$$D_2' = \begin{bmatrix} \infty & \infty \\ 0 & \infty \end{bmatrix} \begin{array}{c} \infty \\ 0 \end{array} \qquad C_2' = \infty$$
$$\begin{array}{cc} 0 & \infty \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & 2 \\ 4 & \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad 0 \qquad D''_2 = \qquad\qquad C''_2 = 21 + 0 = 21$$

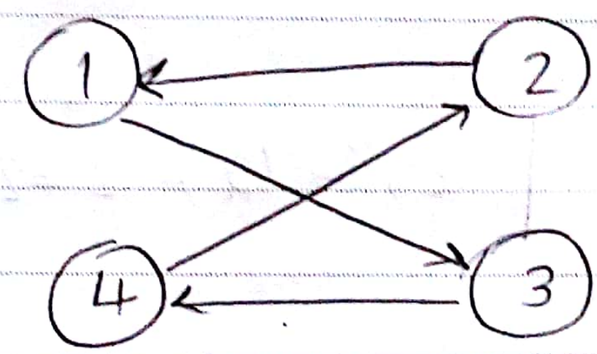
0

$\{(3,4), (1,3), (2,1)\} \subseteq V'_2$

$\{(3,4), (1,3), (2,1)\} \subseteq V''_2$

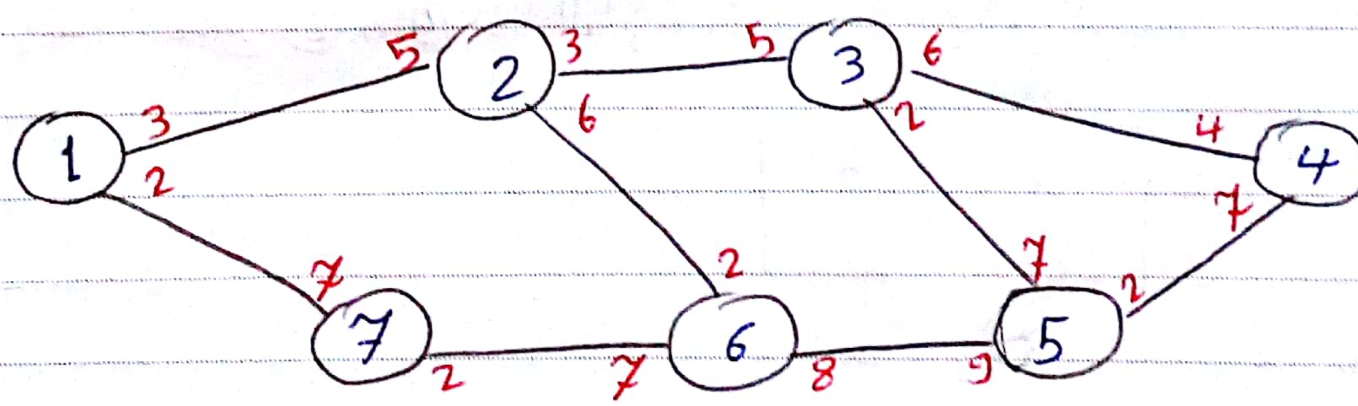
نضيف الضلع $(4,2)$

$\{(2,1), (1,3), (3,4), (4,2)\}$



وظيفة:

- أوجد دائرة هاملتون الأصغرية للبيان التالي:
- واكتب المصفوفة الموافقة لهذا البيان
- اكتب خطوات خوارزمية السياحة الدائرية.



مسألة ساعي البريد الصيني Kuan 1962

وهي ساعي بريد يحمل رسائل من مكتب البريد وينتقل بها لتوزيعها على أصحابها ثم يعود إلى المكتب

إذاً يجب عليه أن يغطي جميع الشوارع التي يوجد فيها أصحاب رسائل.

يرغب ساعي البريد أن يحقق مهمته بأقل مسافة ممكنة

وبذلك وُجدت نظرية لحل هذه المسألة:

- كل عنوان يقابل عقدة.
- المسافة بين عقدة وأخرى محسوبة كمسافة
- نعتبر مركز البريد أيضاً عقدة.
- البيان الذي نحصل عليه هو بيان موزون وبالتالي المطلوب إيجاد دائرة مثالية

أولاً:

إذا كان البيان المعطى هو بيان أويلر فالدائرة المثالية ستكون دائرة أويلر وهي الدائرة التي تمر بجميع عقد البيان.

وبالتالي فإن مسألة ساعي البريد يمكن حلها بسهولة لأنه يمكن إيجاد دائرة أويلر باستخدام خوارزمية فلوير Flur

خوارزمية فلوير لإيجاد دائرة أويلر المثالية:

1. الخطوة الأولى: نختار عقدة عشوائية ولتكن عقدة b_0

لنفترض أننا اخترنا مسار ولكن:

$$w_i = v_0 e_1 v_1 e_2 \; ---- \; e_i v_i$$

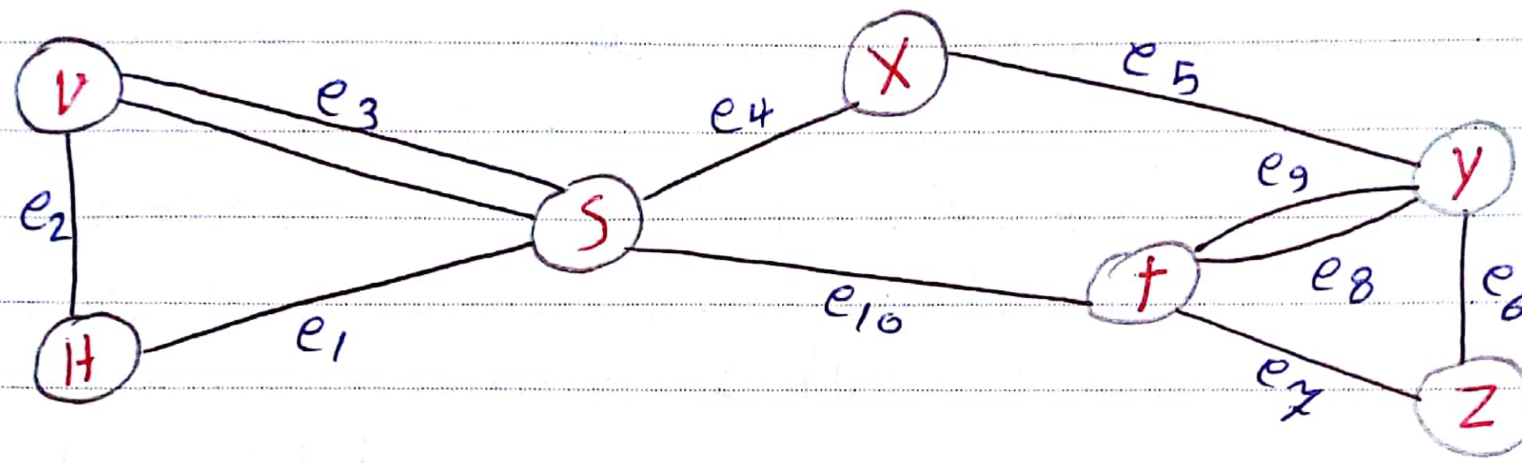
بحيث الضلع e_{i+1} يمكن اختياره إذا لم يكن جسر في البيان G_i

$$G_i = G - \{e_1, e_2, \ldots, e_i\}$$

تتوقف الخوارزمية عندما لا نستطيع تكرار الخطوة السابقة.

Scanned by CamScanner

مثال : ليكن لدينا البيان التالي :



المطلوب :

إيجاد دارة أويلر ذات الكلفة الأصغرية

الحل :

لنختار الآن المسار

نختار العقدة v

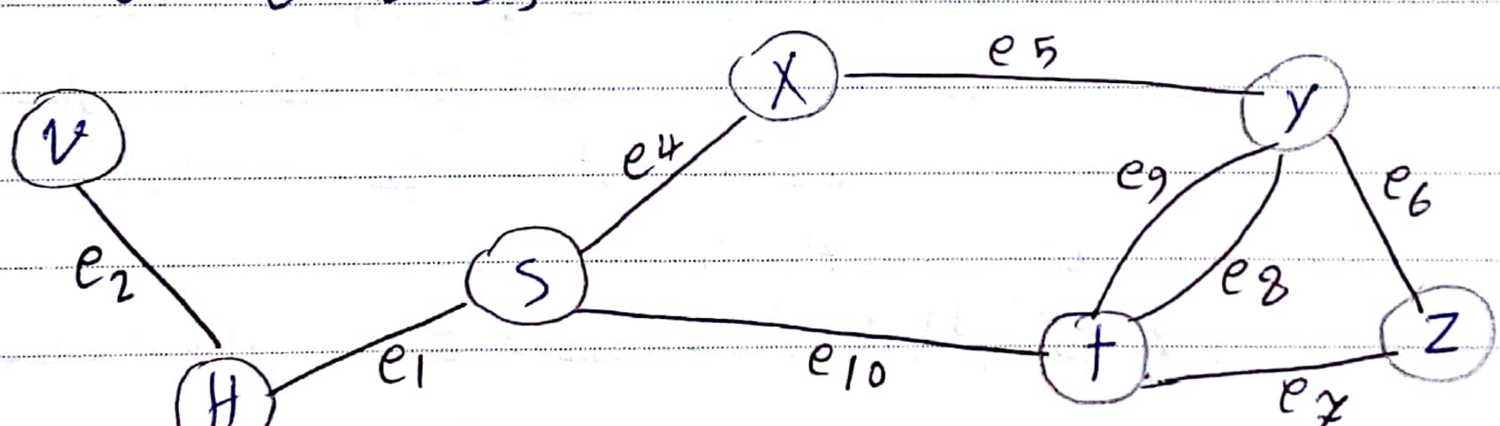
العقدة v تؤثر على العقدة

إذا اخترنا العقدة S والضلع e_3 $\qquad v\, e_3\, S$

الأضلاع التي تؤثر على S هي : (عدا e_3)

e_4 و e_1 و e_{10}

$G' = G - \{e_3\}$

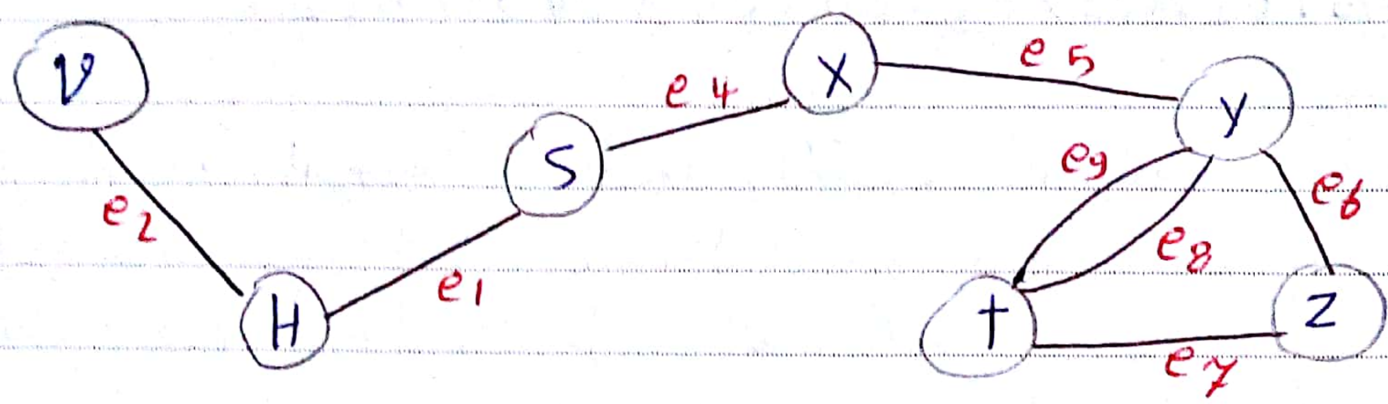


- الضلع e_1 يمثل جسر لذلك نختار إما e_4 أو e_{10}
- لنفترض أننا اخترنا e_{10}
- أصبح المسار لدي على الشكل التالي :

$v\, e_3\, S\, e_{10}\, t$

- بعد حذف عقدتين سيصبح البيان:

$G' = G - \{e_3, e_{10}\}$



- نلاحظ أن العقدة t تؤثر عليها الأضلاع: e_7, e_8, e_9

يمكننا اختيار أي ضلع منهم

- نختار الضلع e_7

سيصبح المسار الجديد لدي: $v e_3 s e_{10} t e_7 z$

- البيان الجديد هو:

$G'' = G - \{e_3, e_{10}, e_7\}$

- العقدة z يؤثر عليها الضلع e_6

يجب أن نختار الضلع e_6

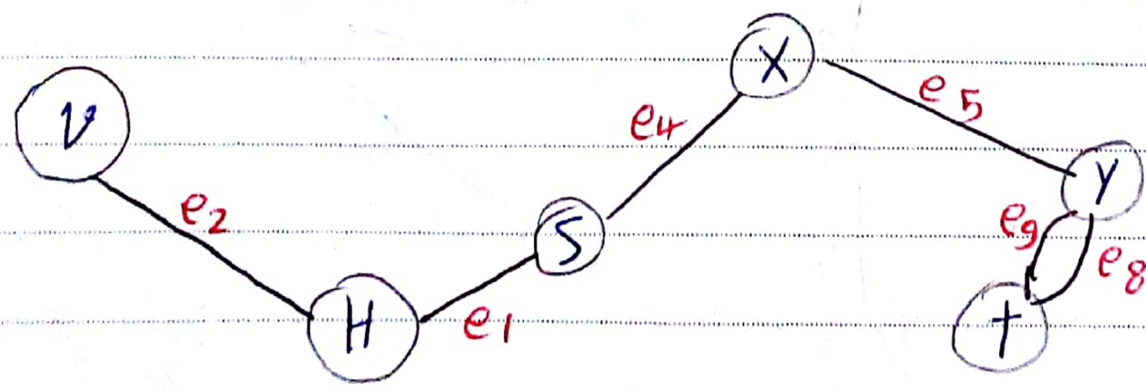
فيصبح المسار: $v e_3 s e_{10} t e_7 z e_6 y$

ويصبح البيان:

$G''' = G - \{e_3, e_{10}, e_7, e_6\}$

(نحذف الأضلاع البقية والعقد المعزولة)

- نختار الضلع e_8 ------ وهكذا ---



نكرر هذه العملية حتى نصل على المسار التالي:

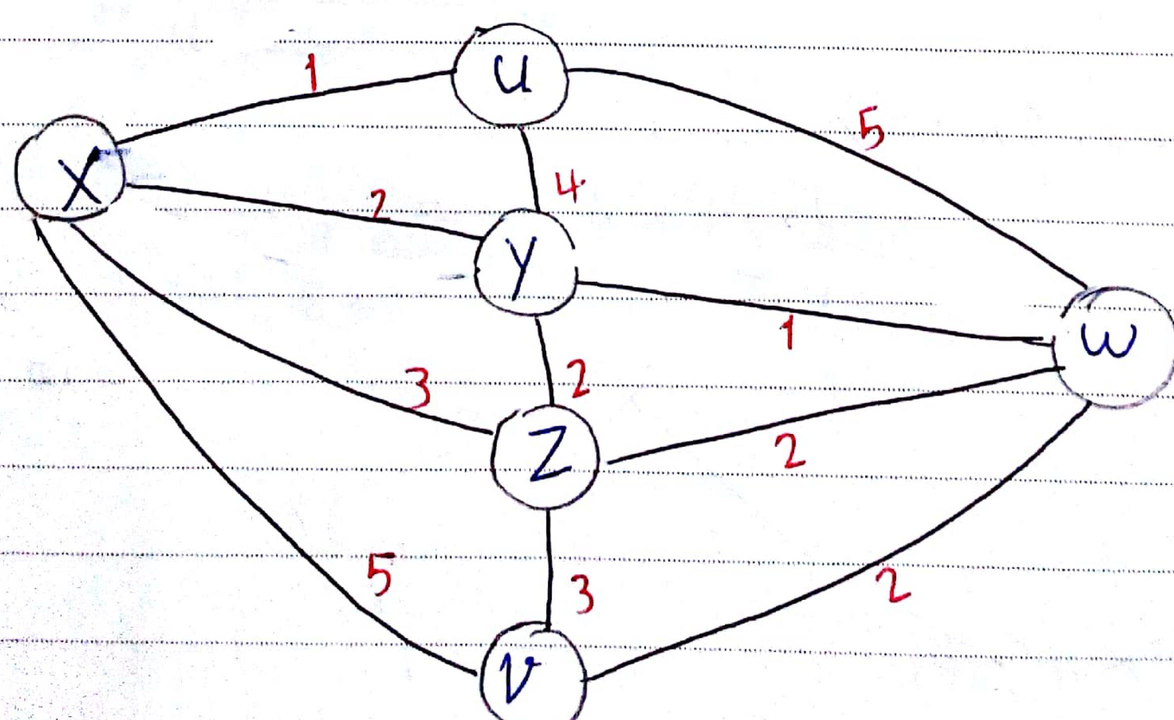
$V e_3 S e_{10} T e_7 Z e_6 Y e_8 T e_9 Y e_5 X e_4 S e_1 H e_2 V$

- نلاحظ أنه لا يوجد تكرار للأضلاع ولكن يوجد تكرار للعقد.
- نلاحظ أن هذه الدائرة تحتوي كل أضلاع البيان
- بدائرة أويلر الأضلاع لا تتكرر ، العقد تتكرر
- إذاً تمكن خوارزمية أويلر من إيجاد دائرة أويلر في البيان الموزون
- يكون البيان بيان أويلر إذا كانت قدرة جميع عقده عدد زوجي.

ملاحظة:

* في حال كان البيان الذي رسمناه ليس بيان أويلر عدد العقد الفردية في البيان يجب أن يكون زوجي.
* أبحث عن الأضلاع التي يمكن إضافتها بحيث نصل بين العقد الفردية حتى نصل على بيان قدرات جميع عقده زوجية.

مثال: ليكن لدينا البيان التالي:



المطلوب :

إيجاد دارة أويلر لهذا البيان

الحل :

يوجد عقدتين فرديتين u و v

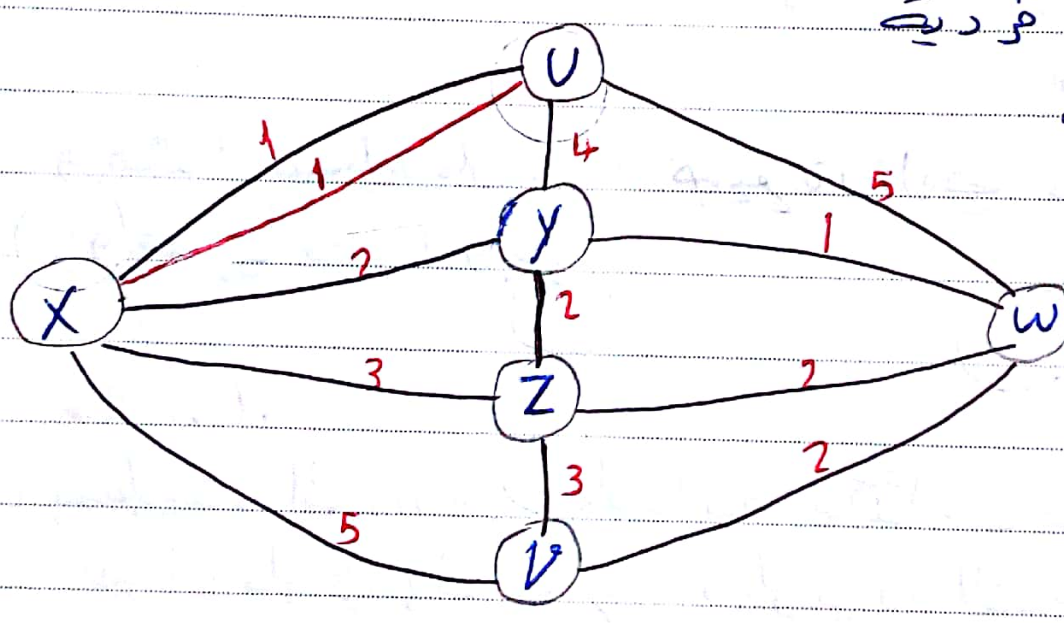
خوارزمية تحويل هذا البيان إلى بيان أويلر :

(*) نبحث عن العقد الفردية v و u

- نأخذ الأضلاع التي تؤثر على العقد الفردية
- نأخذ الضلع ذات القيمة الأصغرية 1
- نضاعف هذا الضلع 1 1

(*) أصبح X و v عقد فردية

- نبحث عن أصغر قيمة من الأضلاع التي تؤثر على العقد الفردية X و v (باستثناء الضلع الذي ضاعفناه ومضاعفه)

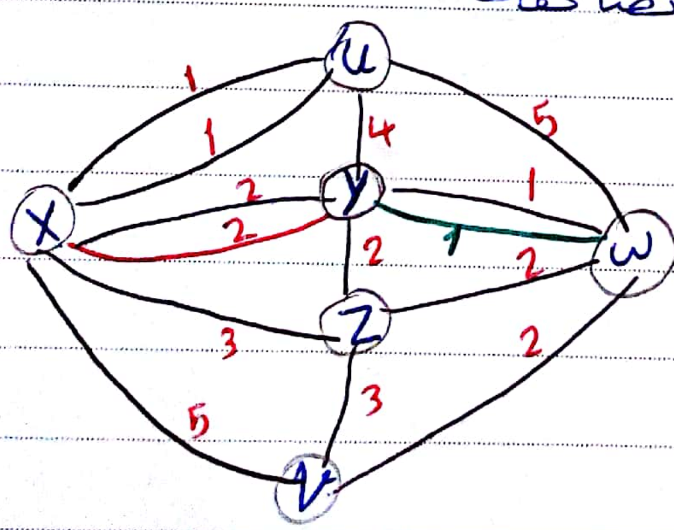


لدينا أصغرهم :

$X \xrightarrow{2} Y$

$V \xrightarrow{2} w$

- نختار مثلاً الضلع $X \xrightarrow{2} Y$ ونضاعفه



(*) أصبح لدينا في البيان الجديد v و Y عقد فردية

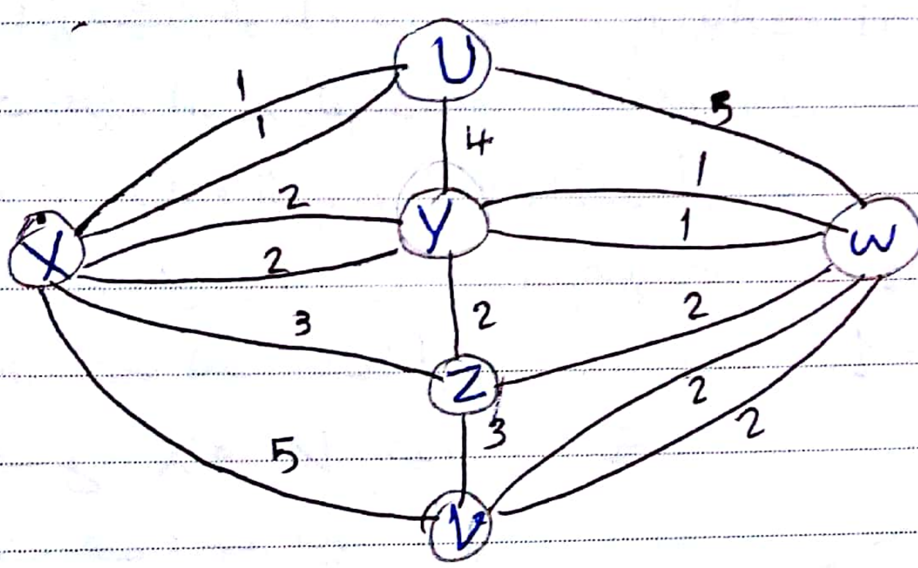
لدينا الضلع $Y \xrightarrow{1} w$ أصغر قيمة من بين قيم الأضلاع التي تؤثر على العقد الفردية نضاعفه

(*) أصبح w و v عقد فردية

$w \xrightarrow{2} Z$ } أصغرهم

$w \xrightarrow{2} V$

نختار الضلع $V \xrightarrow{2} w$ ونضاعفه



وهكذا حصلنا على بيان قدرات جميع عقده زوجية
وهو بيان أويلر

ملاحظة:

بتطبيق الخوارزمية السابقة تمكنّا من نقل البيان من بيان غير أويلري إلى بيان أويلري وذلك من خلال مضاعفة الأضلاع

مسألة البائع الجوال : (Salesman person Problem)

يوجد بائع جوال يود التنقل بين عدة بلدات، ثم يعود إلى نقطة البداية، وكان البائع يريد أن يزور كل بلدة مرة واحدة فقط وذلك بأقل مسافة ممكنة حيث أنه يعلم المسافات مسبقاً.

أيضاً هنا يتم تمثيل المسألة على شكل بيان موزون، عقده هي: مركز البداية، والبلدات المراد زيارتها،

وأضلاعه هو: الطرق الواصلة بين هذه البلدات، والمسافات الواصلة بينها هي أوزان الأضلاع

- هنا البائع يريد أن يزور المدينة مرة واحدة فقط وبأقل مسافة ممكنة بالتالي فإن الدائرة المثالية هنا هي دائرة هاملتون الأصغرية حيث لا يتم فيها تكرار العقد
- أخذنا سابقاً هو ارزمية السياحة الدائرية لإيجاد دائرة هاملتون الأصغرية، سنناقش الآن أحد الطرق المبنية على التجريب وذلك عن طريق اختيار دائرة ما من دوائر هاملتون الموجودة في البيان المعطى، ثم نقوم ببعض التحسينات على هذه الدائرة من خلال استبدال بعض الأضلاع بأضلاع أخرى من غير دائرة، وننتهي بالتحسينات حتى الحصول على دائرة هاملتون الأصغرية.

خطوات الخوارزمية :

$\boxed{1}$ نختار دائرة C بحيث أن C هي دائرة هاملتون عشوائية من البيان

$\boxed{2}$ نبحث عن دائرة C_1 بحيث تكون كلفتها أقل من كلفة الدائرة الأساسية C وذلك عن طريق إيجاد ضلعين يمكن استبدالهما بضلعين جديدين فمثلاً إذا كان لدي الضلعين e_1, e_2 نستبدلهما بالضلعين e_3 و e_4 بشرط تحقق :

$$\underbrace{cost}_{\text{كلفة}}(e_3) + cost(e_4) < cost(e_1) + cost(e_2)$$

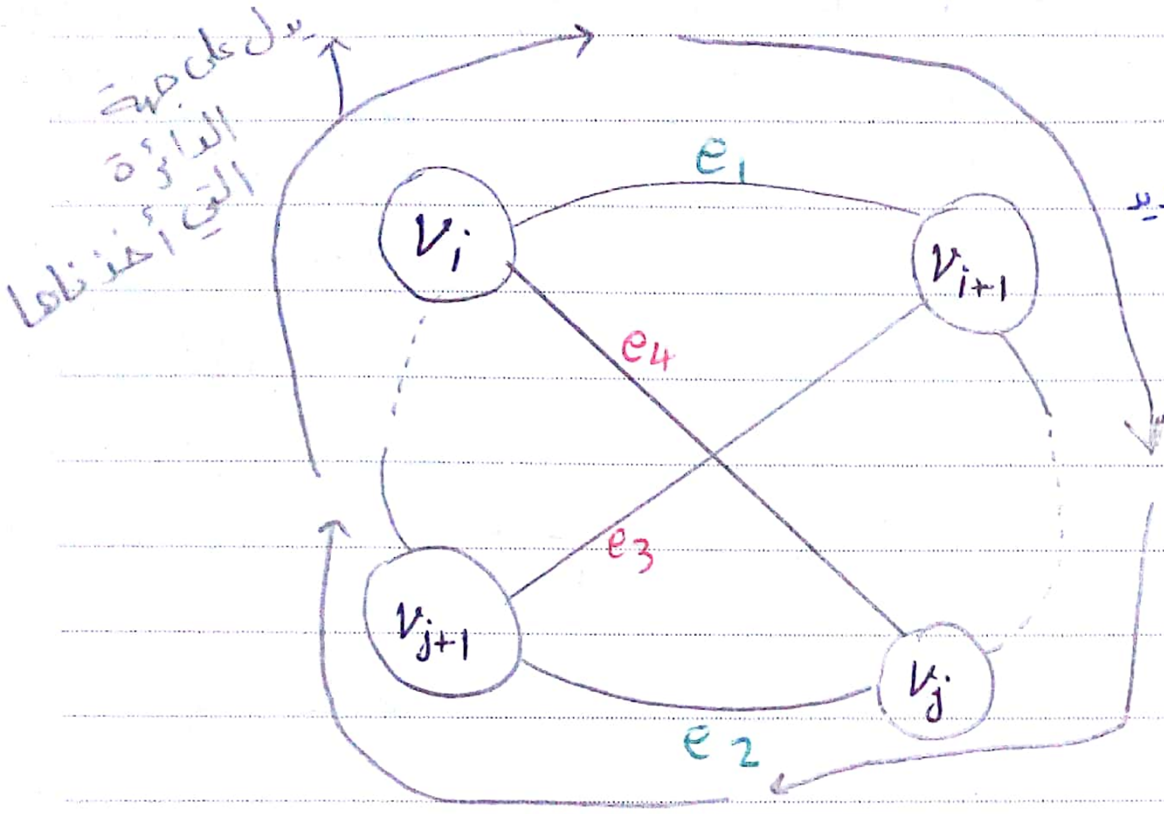
3 نستمر بتكرار الخطوة السابقة حتى نصل لمرحلة لا يمكن إيجاد دائرة أصغر.

مثال توضيحي:

بفرض لدينا البيان التالي:

(النقط (----) تعني وجود العديد من العقد)

~~فنأخذ الدائرة~~ :



فنأخذ الدائرة:

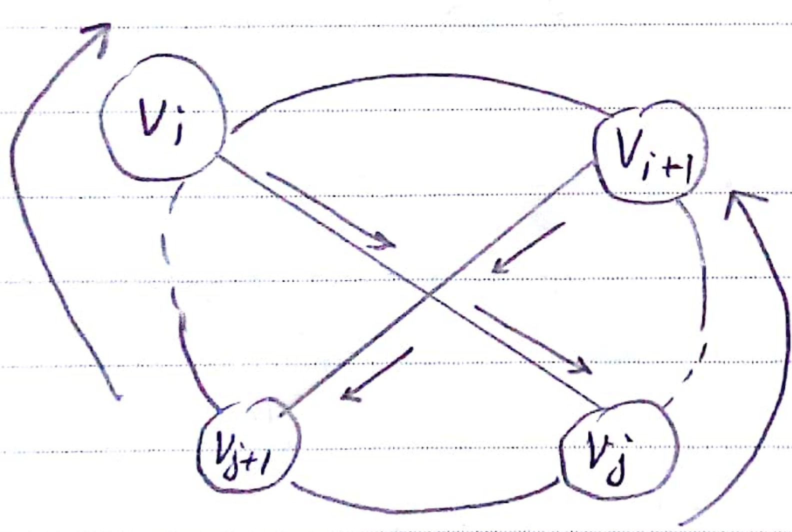
$$C = < v_i, e_1, v_{i+1}, \dots, v_j, e_2, v_{j+1}, \dots, v_i >$$

فإذا كان:

$$cost(e_3) + cost(e_4) < cost(e_1) + cost(e_2)$$

فإننا نقوم باستبدال الضلعين e_1 و e_2 بالضلعين e_3, e_4

وتصبح الدائرة بالشكل:

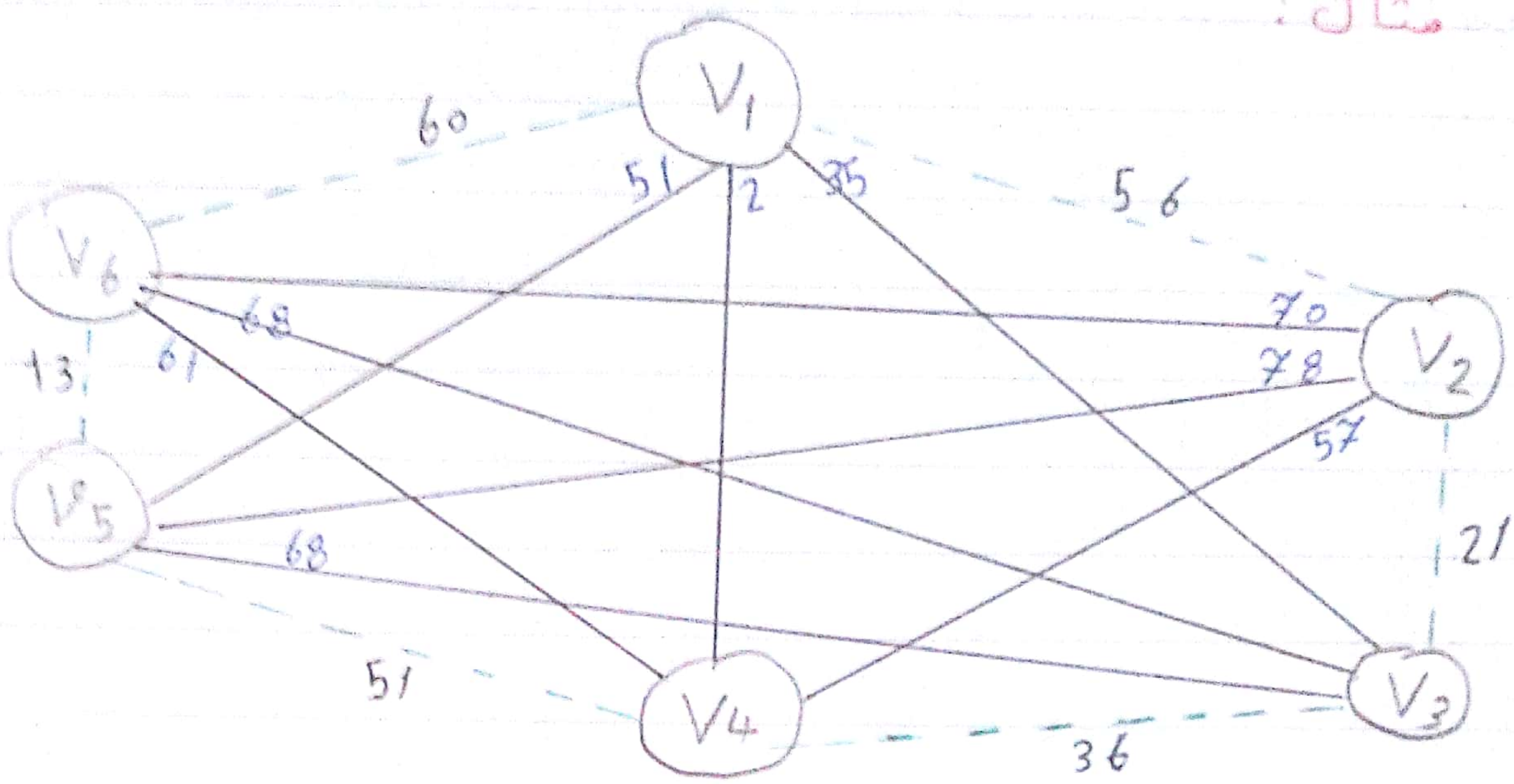


ويكون عندها كلفة الدائرة:

$$C' = < v_i, e_4, v_j, \dots, v_{i+1}, e_3, v_{j+1}, \dots, v_i >$$

أقل من كلفة الدائرة الأساسية C

مثال :



- لنأخذ دائرة هاملتون المقطعة في البيان الأخير وهي :

$C = < V_1 , V_2 , V_3 , V_4 , V_5 , V_6 , V_1 >$

- وكلفتها هي :

$cost(C) = 56 + 21 + 36 + 51 + 13 + 60 = 237$

- نبحث الآن عن تعديل بحيث نبدل ضلعين من أضلاع هذه الدائرة ، فنجد أن :

$W(V_1 V_2) + W(V_4 V_5) = 56 + 51 = 107 >$

$> W(V_1 V_4) + W(V_2 V_5) = 2 + 78 = 80$

بالتالي نقوم بالتبديل فتصبح الدائرة بالشكل :

$C' = < V_1 , V_4 , V_3 , V_2 , V_5 , V_6 , V_1 >$

وكلفتها :

$cost(C') = 2 + 36 + 21 + 78 + 13 + 60 = 210$

- نبحث الآن عن تعديل جديد ، فنجد أن :

$W(V_1 V_5) + W(V_6 V_2) = 51 + 70 = 121 < W(V_1 V_6) + W(V_2 V_5) = 60 + 78 = 138$

فتصبح الدائرة بالشكل :

$C'' = < V_1 , V_5 , V_6 , V_2 , V_3 , V_4 , V_1 >$

وكلفتها :

$cost(C'') = 51 + 13 + 70 + 21 + 36 + 2 = 193$

وهكذا نستمر حتى الوصول إلى دائرة لا يمكن استبدال أضلاعها.

(إن $W(V_i V_j)$ تعني وزن الضلع (V_i, V_j))

وظيفة :

طبق خوارزمية السياحة الدائرية على البيان السابق وتأكد أن كلفة الدائرة المثالية أصغر أو تساوي 193 .

انتهى

بيان الباشا ٨٨