حل تمارين

◄دكتور المادة: خليل يحيى

◄المحاضرة : ملحق للتمارين ◄ عنوان المحاضرة: حل تمارين

*أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية :

١- $e^{x+y}\,dy = e^{-2x}\,dx$

الحل :

$$e^{x}.e^{y}\,dy = e^{-2x}\,dx$$
$$e^{y}dy = e^{-3x}\,dx$$

بالمكاملة :

$$e^{y}=-3x.e^{-3x}+c$$

٢- $\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}$

الحل :

$$\frac{dy}{2\sqrt{y}} = dx$$

نكامل

$$\sqrt{y} = x + c$$

$$y = x^{2} + c$$

٣- $y' = e^{y}$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = e^{y}$$
$$\frac{dy}{e^{y}} = dx$$
$$e^{-y} = x + c$$

نكامل

$$-y = \ln x + \ln c$$

$$y = -\ln y + \ln c$$

٤- $y' = x.e^{-y}$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = x.e^{-y}$$
$$\frac{dy}{e^{-y}} = x.dx$$
$$e^{y}dy = xdx$$
$$e^{y} = \frac{x^2}{2} + c$$
$$y = \ln\frac{x^2}{2} + \ln c$$

٥- $2x.\sin y.dx + (x^2+3)\cos y dy = 0$

الحل :

نقسم على $(x^2+3)\sin y$

$$\frac{2x}{x^2+3}dx + \frac{\cos y}{\sin y}dy = 0$$
$$\ln(x^2+3) + \ln(\sin y) + \ln(c) = 0$$

٦- $y' = \frac{3x-y+5}{x+y-1}$

الحل :

لدينا المستقيمان:

$$D_1 : 3x - y + 5$$
$$D_2 : x + y - 1$$

نلاحظ أنَّ: $\frac{3}{1} \neq \frac{-1}{1}$ إذاً فالمستقيمان D_1 و D_2 متقاطعان

ولإيجاد نقطة التقاطع $M(\alpha,\beta)$ نحل جملة معادلتيهما حل مشترك:

من معادلة D_2 نجد: $x = -y + 1 \ldots (*)$

نعوض $(*)$ في معادلة D_1: $-3y + 3 - y + 5 = 0$

$\Rightarrow -4y = -8 \Rightarrow y = 2$

نعوض قيمة y في $(*)$: $x = -2 + 1 \Rightarrow x = -1$

ومنه فنقطة التقاطع هي: $M(-1,2)$

والآن نجري التحويل:

$$\begin{cases} x = X + \alpha \;\Rightarrow x = X - 1 \Rightarrow dx = dX \\ y = Y + \beta \;\Rightarrow y = Y + 2 \Rightarrow dy = dY \end{cases}$$

نعوض في المعادلة التفاضلية:

$$y' = \frac{3(X-1) - (Y+2) + 5}{(X-1) + (Y+2) - 1} = \frac{3X - Y}{X + Y}$$

نقسِّم البسط والمقام على $X \neq 0$:

$$\Rightarrow y' = \frac{3 - \frac{Y}{X}}{1 + \frac{Y}{X}}$$

نفرض: $Z = \frac{Y}{X} \Leftarrow Y = Z.X \Leftarrow Y' = Z + XZ'$

نعوض في المعادلة التفاضلية:

$$\Rightarrow Z + XZ' = \frac{3 - Z}{1 + Z} \Rightarrow XZ' = \frac{3 - Z}{1 + Z} - Z$$

$$\Rightarrow X\frac{dZ}{dX} = \frac{3 - Z - Z - Z^2}{1 + Z} = \frac{-Z^2 - 2Z + 3}{1 + Z}$$

وهي معادلة تفاضلية قابلة لفصل المتحولات..

$$\Rightarrow \frac{X}{dX} = \frac{-Z^2 - 2Z + 3}{1 + Z}.\frac{1}{dZ} \Rightarrow -\frac{dX}{X} = \frac{Z + 1}{Z^2 + 2Z - 3}.dZ$$

$$\Rightarrow -\frac{dX}{X} = \frac{1}{2}.\frac{2Z + 2}{Z^2 + 2Z - 3}.dZ$$

نكامل الطرفين:

$$\Rightarrow -ln|X| + ln|c| = \frac{1}{2}ln|Z^2 + 2Z - 3|$$

$$\Rightarrow ln\left|\frac{c}{X}\right| = ln|Z^2 + 2Z - 3|^{\frac{1}{2}} = ln\sqrt{Z^2 + 2Z - 3}$$

$$\Rightarrow \frac{c}{X} = \sqrt{Z^2 + 2Z - 3}$$

نعود فنعوض قيمة Z :

$$\Rightarrow \frac{c}{X} = \sqrt{\frac{Y^2}{X^2} + 2\frac{Y}{X} - 3}$$

والآن نعوض: حيث لدينا:

$$\begin{cases} Y = y - 2 \\ X = x + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{c}{x+1} = \sqrt{\frac{(y-2)^2}{(x+1)^2} + 2\frac{(y-2)}{(x+1)} - 3}}$$

٧- $(x + y + 1).dx + (x - y^2 + 3).dy = 0$

الحل :

لنبرهن أنها تامة:

لإيجاد الحل العام يجب إيجاد الدالة F، لنأخذ:

$$F(x,y) = \int M(x,y).dx + \varphi(y) = \int (x + y + 1).dx + \varphi(y)$$

$$= \frac{x^2}{2} + yx + x + \varphi(y) \begin{cases} M(x,y) = x + y + 1 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 1 \\ N(x,y) = x - y^2 + 3 \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 1$$

الشرط محقق إذاً المعادلة التفاضلية تامة ، والحل العام من الشكل: $F(x,y) = C$

نوجد المشتق الجزئي بالنسبة لـ y:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x + \varphi'(y) = N$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = x + \varphi'(y) = x - y^2 + 3 \Rightarrow \varphi'(y) = -y^2 + 3$$

$$\Rightarrow \varphi(y) = -\frac{y^3}{3} + 3y + c$$

$$\Rightarrow \boxed{F(x,y) = \frac{x^2}{2} + yx + x - \frac{y^3}{3} + 3y = C}$$

وهو الحل العام المطلوب.

٨- $(x + y)dx + (3x + 3y - 4)dy = 0$

الحل :

نلاحظ أن : $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \neq -\frac{4}{0}$

أي أن المستقيمان متوازيان ولإيجاد الحل العام نفرض أن :

$$z = (x + y)$$

$dz = dx + dy \longleftarrow dy = dz - dx$ نعوض في المعادلة:

$$zdx + (3z - 4)(dz - dx) = 0$$

$$zdx + 3zdz - 3zdx - 4dz + 4dx = 0$$

$(-2z + 4) + (3z - 4)dz = 0 \Leftarrow dx = \dfrac{-3z + 4}{-2z + 4}\, dz$

معادلة تفاضلية قابله للفصل ← نكامل ثم نوجد الحل العام

٩- $\boldsymbol{y' + 2xy = 4x}$

الحل :

نأخذ المعادلة بدون طرف ثاني:

$$y' + 2xy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -2xy \quad \frac{dy}{dx} = -2xdx$$

نكامل $\ln|y| = -x^2 + \ln|c|$

$$\ln|y| - \ln|c| = -x^2$$

$$\ln\left|\frac{y}{c}\right| = -x^2$$

$$y = c.e^{-x^2} \quad \frac{y}{c} = e^{-x^2}$$

نجعل c تابع ل x :

$$y = c(x).e^{-x^2}$$

نشتق بالنسبة ل x: $y' = c'(x).e^{-x'} - 2x.c(x).e^{-x^2}$

نعوض في المعادلة مع طرف ثاني :

$$c'(x).e^{-x^2} - 2x.c(x).e^{-x^2} + 2x.c(x).e^{-x^2} = 4xc'(x).e^{-x^2}$$

$$= 4x\, c'(x) = 4x.e^{-x^2}$$

نكامل الطرفين :

$$c(x) = 2.e^{-x^2} + c$$

ثم نعوض قيمة c

$$y = \left(2.e^{-x^2} + c\right).e^{-x^2}$$

١٠- $\boldsymbol{y'' - 7y' = (3 - 36x)e^{4x}}$

الحل :

نأخذ المعادلة بدون طرف ثاني : $y'' - 7y' = 0$

المعادلة المميزة : $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 7$ ⇐ $\lambda^2 - 7\lambda = 0$

الحل العام بدون طرف ثاني : $y = c_1 + c_2 e^{7x}$

الحل الخاص : نلاحظ أن $\alpha = 4$ ليست جذر للمعادلة المميزة :

$$y_p = (A + Bx)e^{4x}$$

بالاشتقاق والتعويض بالمعادلة التفاضلية مع طرف ثاني نجد أن :

A=0 , B = 3

$$y_f = 3x.e^{4x}$$

$$y = y_1 + y_2$$

$$c_1 + c_2 e^{7x} + 3xe^{4x}$$

١١- $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}(x^3 + x)$

الحل :

نأخذ المعادلة بدون طرف ثاني: $y'' - 4y' + 4y = 0$

المعادلة المميزة $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ ⇐ $\lambda = 2$ مضاعف

الحل العام بدون طرف ثاني $y = c_1 e^{2x}. + c_2.e^{2x}$

الحل الخاص :نلاحظ أن $\alpha = 2$ هي جذر للمعادلة المميزة :

$$y_f = x^2.[Ax^3 + Bx^2 + cx + D$$

بالاشتقاق والتعويض بالمعادلة التفاضلية مع طرف ثاني :

$$A = \frac{1}{20} \quad , \quad B = D = 0 \quad , C = \frac{1}{6}$$

$$y_f = x^2.e^{2x}[\frac{1}{20}.x^3 + \frac{1}{6}.x]$$

$$y = y_1 + y_2$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{2x} + x^2 e^{2x}[\frac{1}{20}x^3 + \frac{1}{6}x]$$

إعداد: بسمة نصر الله و هالة مصطفى و علا الدالاتي