المحاضرة رقم -12-

البرامج الديناميكية :

هي طريقة تمكننا من الوصول إلى الحل الأمثل (صنع القرار) في المسائل متعددة المراحل إذا استطعنا تقسيم المسألة لمسائل أصغر على فترات بحيث يكون الحل الأمثل لها من خلال البرنامج الديناميكي في الفترة الأولى ثم في الفترة الأولى والثانية معاً وهكذا حتى نصل للفترة الأخيرة وبذلك نكون قد حصلنا على كامل المسألة .

* نعرف : $V_t(x)$

هو أفضل قيمة للمسألة في T خطوة (مرحلة) حيث ابتدأنا بالحالة x

خطوات الحل : نقوم بتحديد القيم التالية :

① فضاء الحالات S .

② الفترة الزمنية (المرحلة - الخطوة) t .

③ فضاء القرارات A .

④ الدخل في حالة معينة وقرار معين $R(a,x)$ حيث $a \in A, x \in S$

⑤ تابع الحالة $y = f(x,a)$ الحالة التي وصلنا لها y حيث كنا في المرحلة x واتخذنا القرار a

البرنامج الديناميكي :

$$V_t(x) = \underset{a \in A}{\overset{\text{Min}}{\underset{\sim}{\text{Max}}}} \{R(a,x) + V_{t-1}(f(x,a))\}$$

تجزئة البرنامج الديناميكي لمرحلتين :

① المرحلة T

② والمراحل من (0) إلى (T-1)

$$\underset{0 \to T}{\underline{V_T}}(x) = \underset{a \in A}{\text{Max}} \{ \underbrace{R(a,x)}_{\text{(في المرحلة T)}} + \underbrace{V_{T-1}(f(x,a))}_{\text{المراحل من 0 إلى (T-1)}} \}$$

شرح كيفية التجزئة :

$$\{ (0 \to T) = T + (0 \to T-1) \}$$

Scanned by CamScanner

مثالين :

① أوجد $V_0, V_1, \vdots, V_{10}$ هي الحالة الابتدائية أي سنوجد V_t بدلالة V_{t-1} (علاقة تقدمية)

أو ② أوجد $V_{10}, V_9, \vdots, V_0$ حيث V_{10} هي الحالة الابتدائية أي سنوجد V_{t-1} بدلالة V_t

(علاقة تراجعية)

إذاً { إما أن نبدأ من الأول للأخير أو من الأخير للأول حسب المسألة }

مسألة: أوجد أقصر طريق من A إلى Z في البيان التالي مستخدماً البرنامج الديناميكي

الحل : أول خطوة نعرف التابع $V_t(x)$

$V_t(x)$ = أقصر طريق من x إلى Z بـ t خطوة حيث $x \in$ لفضاء الحالات

• نحدد الحالات والقرارات والفترة الزمنية والدخل وتابع الحالة.

① فضاء الحالات: $S = \{A, B, C, D, E, F, G, Z\}$

② الفترة الزمنية: (المرحلة _ الخطوة) : عدد الأضلاع للوصول إلى Z

③ القرارات: القرار يعتمد أين موجودين بالمرحلة t.

• أي في حال كنا عند E فليس لدينا سوى قرار واحد. $E \to G \to Z$

• بينما لو كنا عند D فنحن أمام خيارين

$$\left.\begin{array}{l} D \to F \to Z \\ D \to G \to Z \end{array}\right\}$$

④ الدخل: هي كلفة الضلع $R_{a \in A}(a,x) = C_{\overrightarrow{xa}}$

⑤ تابع الحالة: الضلع x_a يوصل إلى العقدة a $f(x,a) = a$

• البرنامج الديناميكي:

نحن نريد أقصر طريق من A لـ Z لكن ليس بطريقة مباشرة لذلك نشتغل على خطوات $Z \leftarrow x \in S$

$$V_t(x) = \min_{a\in A}\left\{ R(a,x) + V_{t-1}\left(f(x,a)\right) \right\}$$

$$V_t(x) = \min_{a\in A}\left\{ C_{\overrightarrow{xa}} + V_{t-1}(a) \right\}$$

الحالة الابتدائية هي أن أصل من Z إلى Z بصفر خطوة $V_0(Z)=0$ بما أننا ابتدأنا
من Z فإن البرنامج تراجعي

$$V_1(F) = \min_{a=Z}\left\{ \underbrace{C_{\overrightarrow{FZ}}}_{4} + \underbrace{V_0(Z)}_{0} \right\} = 4$$

خطوة واحدة للوصول لـ Z

$$V_1(G) = \min_{a=Z}\left\{ \underbrace{C_{\overrightarrow{GZ}}}_{4} + \underbrace{V_0(Z)}_{0} \right\} = 4$$

$$V_2(D) = \min_{a\in\{F,G\}}\left\{ \underbrace{\underbrace{C_{\overrightarrow{DF}}}_{3} + \underbrace{V_1(F)}_{4}}_{F},\ \underbrace{\underbrace{C_{\overrightarrow{DG}}}_{5} + \underbrace{V_1(G)}_{4}}_{G} \right\}$$

خطوتين للوصول لـ Z

$D \rightarrow F \rightarrow Z$

$D \rightarrow G \rightarrow Z$

$$= \min\{7, 9\} = 7$$

ومنه القرار المتخذ هو F $V_2(D) = 7$

أي أننا إذا كنا في D نختار F للوصول لـ Z

$$V_2(E) = \min_{a=G}\left\{ \underbrace{C_{\overrightarrow{EG}}}_{8} + \underbrace{V_1(G)}_{4} \right\} = 13$$

$E \rightarrow G \rightarrow Z$

لا يوجد إلا قرار واحد وهو القرار المتخذ G

$$V_3(B) = \min_{a\in\{D,E\}}\left\{ \underbrace{C_{\overrightarrow{BD}}}_{8} + \underbrace{V_2(D)}_{7},\ \underbrace{C_{\overrightarrow{BE}}}_{5} + \underbrace{V_2(E)}_{13} \right\}$$

$B \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow Z$

$B \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow Z$

$$= \min\{15, 18\} = 15$$

ومنه القرار المتخذ هو D

$$V_3(C) = \underset{a\in\{D,E\}}{Min} \{ \underbrace{C_{\overrightarrow{CD}}}_{7} + \underbrace{V_2(D)}_{7} , \underbrace{C_{\overrightarrow{CE}}}_{9} + \underbrace{V_2(E)}_{13} \}$$

$$= Min\{14, 22\} = 14$$

القرار المتخذ هو D .

$$V_4(A) = \underset{a\in\{B,C\}}{Min} \{ \underbrace{C_{\overrightarrow{AB}}}_{4} + \underbrace{V_3(B)}_{15} , \underbrace{C_{\overrightarrow{AC}}}_{10} + \underbrace{V_3(C)}_{14} \}$$

$A \to B \to D \to F \to Z$

$A \to C \to E \to G \to Z$ $= Min\{19, 24\} = 19$

ومنه القرار المتخذ هو B .

ومنه الحل الأمثل :

كلفة أقصر طريق من A إلى Z هي 19 .

$$A \xrightarrow{4} B \xrightarrow{8} D \xrightarrow{3} F \xrightarrow{4} Z$$

مسألة -2-

تريد شركة أن تستثمر حقل نفط لمدة ثلاث سنوات حيث كمية النفط المتوفرة بالحقل هي $\boxed{6}$ وحدات يمكن للشركة استخراج نصف الكمية المتوفرة في الحقل في بداية السنة

الربح في الوحدة الواحدة هو 10 ، 15 ، 12 مليون دج في السنوات الأولى ، الثانية والثالثة على الترتيب .

يباع النفط المتبقي في البئر إلى المستثمر الثاني (أي بعد الثلاث سنوات) بسعر قدره 5 مليون دج للوحدة الواحدة .

المطلوب : اكتب البرنامج الديناميكي وأوجد الحل الأمثل ؟!

الحل :

الهدف : $V_t(x)$ الكسب المستقبلي حيث نحن في السنة t حيث x كمية النفط المتوفرة في بداية السنة .

ملاحظة : في هذه المسألة نلاحظ أن الحالة الابتدائية هي V_4 أي أننا في السنوات الغير مشروطة (لأن السنوات الأولى مشترط عليها استخراج نصف الكمية) .

(كمية النفط الموجودة في البئر في السنة الرابعة) ← $V_4(Z) = 5 \times Z$ } أي نحن أمام مسألة تراجعية ابتداءً من السنة الرابعة ثم الثالثة ثم الثانية ثم الأولى }

كمية الربح

$S = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ كمية النفط

1) الحالات: لدينا من نص المسألة كمية النفط هي 6 وحدات أي $S = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ كمية النفط الموجودة فعلاً

② القرارات: $A_x = \{0 \le a \le \frac{x}{2}\}$ أي إذا كان لدينا x موجودة فإن الخيارات لدينا من $0 \leftarrow \frac{x}{2}$

(من المسألة: يمكن للشركة استخراج نصف الكمية المتوفرة في البئر في بداية السنة t)

③ الربح: $R_t(a,x)$ الربح المعتمد على السنة t حيث a القرار المتخذ و x كمية النفط الموجودة فعلياً

$$\Rightarrow R_t(a,x) = P_t \times a$$

حيث $P_1 = 10,\ P_2 = 15,\ P_3 = 12$

④ تابع الحالة $f(x,a) = x - a$ أي كمية النفط الموجودة - القرار المتخذ

⑤ الفترات هنا تقسم السنوات: الفترة الأولى تضم الثلاث سنوات الأولى

أما الفترة الثانية فتضم كل ما يتبقى من بعد ثالث سنة.

أخيراً نكتب تابع الحالة $V_t(x)$

$$V_t(x) = \max_{0 \le a \le \frac{x}{2}} \{R_t(x,a) + V_{t-1}(x-a)\}$$

لو أعدنا قراءة المسألة لمعرفة المطلوب أن المطلوب $V_1(6) = ?$ أي أفضل كمية نفط مستخرجة في السنة الأولى إذا كان لدينا 6 وحدات نفط في البئر.

$$V_1(6) = \max\{\overbrace{P_1 \times 0 + V_2(6)}^{a=0}, \overbrace{P_1 \times 1 + V_2(5)}^{a=1}, \overbrace{P_1 \times 2 + V_2(4)}^{a=2}, \overbrace{P_1 \times 3 + V_2(3)}^{a=3}\}$$

المطلوب لحساب $V_1(6)$: $V_2(6), V_2(5), V_2(4), V_2(3)$

أولاً لنقوم بحساب ما يلي:

$$V_3(6) = \max_{0 \le a \le 3}\{P_3 \times 0 + V_4(6), P_3 \times 1 + V_4(5), P_3 \times 2 + V_4(4), P_3 \times 3 + V_4(3)$$

$$= \max_{0 \le a \le 3}\{0 + 30, 12 \times 1 + 25, 12 \times 2 + 20, 12 \times 3 + 15\}$$

/ /

$$= \underset{0 \le a \le 3}{Max} \{30, 37, 44, 51\} = 51 \quad ; \quad \boxed{a = 3}$$

ومنه القرار المتخذ عند $V_3(6)$ هو 3

$$V_3(5) = \underset{0 \le a \le 2}{Max} \{P_3 \times 0 + V_4(5), P_3 \times 1 + V_4(4), P_3 \times 2 + V_4(3)\}$$

$$= \underset{0 \le a \le 2}{Max} \{0 + 15, 12 \times 1 + 20, 12 \times 2 + 15\}$$

$$= \underset{0 \le a \le 2}{Max} \{15, 32, 39\} = 39 \quad ; \quad \boxed{a = 2}$$

ومنه القرار المتخذ عند $V_3(5)$ هو 2

$$V_3(4) = \underset{0 \le a \le 2}{Max} \{P_3 \times 0 + V_4(4), P_3 \times 1 + V_4(3), P_3 \times 2 + V_4(2)\}$$

$$= \underset{0 \le a \le 2}{Max} \{0 + 20, 12 \times 1 + 15, 12 \times 2 + 10\}$$

$$= \underset{0 \le a \le 2}{Max} \{20, 27, 34\} = 34 \quad ; \quad \boxed{a = 2}$$

ومنه القرار المتخذ عند $V_3(4)$ هو 2

$$V_3(3) = \underset{0 \le a \le 1}{Max} \{P_3 \times 0 + V_4(3), P_3 \times 1 + V_4(2)\}$$

$$= \underset{0 \le a \le 1}{Max} \{0 + 15, 12 \times 1 + 10\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{0 \le a \le 1}{Max} \{15, 22\} = 22 \quad ; \quad a = 1$$

ومنه القرار المتخذ عند $V_3(3)$ هو 1

$$V_3(2) = \underset{0 \le a \le 1}{Max} \{P_3 \times 0 + V_4(2), P_3 \times 1 + V_4(1)\}$$

$$= \underset{0 \le a \le 1}{Max} \{0 + 10, 12 \times 1 + 5\} \Rightarrow = \underset{0 \le a \le 1}{Max} \{10, 17\} = 17 \quad ; \quad \boxed{a = 1}$$

ومنه القرار المتخذ عند $V_3(2)$ هو 1

ملاحظة: حسبنا أولاً V_3 لأننا نحتاجها في حساب قيم V_2 وليس خطأ أن نقوم بكتابة معادلات V_2 ثم نحسب قيم V_3 ونعود للتعويض في معادلات V_2

$$V_2(6) = \max_{0 \le a \le 3} \{ P_2 \times 0 + V_3(6),\ P_2 \times 1 + V_3(5),\ P_2 \times 2 + V_3(4),\ P_2 \times 3 + V_3(2) \}$$

$$= \max_{0 \le a \le 3} \{ 0 + 51,\ 15 \times 1 + 39,\ 15 \times 2 + 34,\ 15 \times 3 + 22 \}$$

$$= \max_{0 \le a \le 3} \{ 51,\ 54,\ 64,\ 67 \} = 67 \ ;\ \boxed{a = 3}$$

ومنه القرار المتخذ عند $V_2(6)$ هو 3

$$V_2(5) = \max_{0 \le a \le 2} \{ P_2 \times 0 + V_3(5),\ P_2 \times 1 + V_3(4),\ P_2 \times 2 + V_3(3) \}$$

$$= \max_{0 \le a \le 2} \{ 0 + 39,\ 15 \times 1 + 34,\ 15 \times 2 + 22 \}$$

$$= \max_{0 \le a \le 2} \{ 34,\ 37,\ 47 \} = 47 \ ;\ \boxed{a = 2}$$

ومنه القرار المتخذ عند $V_2(4)$ هو 2

$$V_2(3) = \max_{0 \le a \le 1} \{ 0 + V_3(3),\ P_2 \times 1 + V_3(2) \}$$

$$= \max_{0 \le a \le 1} \{ 0 + 22,\ 15 \times 1 + 17 \}$$

$$= \max_{0 \le a \le 1} \{ 22,\ 32 \} = 32 \ ;\ \boxed{a = 1}$$

ومنه القرار المتخذ عند $V_2(3)$ هو 1

$$V_4(6) = 5 \times 6 = 30$$

ومن نعوض في : $V_1(6)$

$$V_1(6) = \underset{0 \le a \le 6=3}{Max} \{ P_1 \times 0 + V_2(6),\ P_1 \times 1 + V_2(5),\ P_1 \times 2 + V_2(4),\ P_1 \times 3 + V_2(3) \}$$

$$= \underset{0 \le a \le 3}{Max} \{ 10 \times 0 + 67,\ 10 \times 1 + 52,\ 10 \times 2 + 47,\ 10 \times 3 + 32 \}$$

$$= \underset{0 \le a \le 3}{Max} \{ 67, 62, 67, 62 \} = 67 \qquad a = 0 \vee 2$$

الربح سيكون 67 والحل الأمثل إما 2 أو 0

* { يستخرج 0 وحدة في السنة الأولى ومنه يبقى للسنة الثانية 6 وحدات
يستخرج 3 وحدة من السنة الثانية ومنه يبقى للسنة الثالثة 3 وحدات
يستخرج 1 وحدة من السنة الثالثة ومنه يبقى للمستثمر 2 وحدة }

أو

(**) { يستخرج 2 وحدة في السنة الأولى ومنه يبقى للسنة الثانية 4 وحدات
يستخرج 2 وحدة من السنة الثانية ومنه يبقى للسنة الثالثة 2 وحدات
يستخرج 1 وحدة من السنة الثالثة ومنه يبقى للمستثمر 2 وحدة }

شرح * (للفهم)

إذا اخترنا استخراج $\boxed{0}$ وحدة من البترول في السنة الأولى يبقى للسنة الثانية من أصل 6 وحدات موجودة بالأساس يبقى 6

نذهب لـ $V_2(6)$ ونأخذ قيمة القرار المتخذ وتكون هي كمية الاستخراج في السنة الثانية (القرار المتخذ $V_2(6)$ هو $\boxed{3}$) يبقى للسنة الثالثة 3 وحدات

نذهب لـ $V_3(3)$ أيضاً ونأخذ القرار المتخذ ونعتبره هو كمية الاستخراج في السنة الثالثة (القرار المتخذ $V_3(3)$ هو $\boxed{1}$) يبقى للمستثمر $6-4=2$ وحدة

شرح ** (للفهم)

لو اخترنا استخراج $\boxed{2}$ وحدة من البترول في السنة الأولى يبقى للسنة الثانية من أصل 6 وحدات موجودة بالأساس يبقى 4 نذهب لـ $V_2(4)$ ونأخذ قيمة القرار المتخذ وتكون هي كمية الاستخراج في السنة الثانية (القرار المتخذ $V_2(4)$ هو $\boxed{2}$)

بقي للسنة الثالثة 2 وحدات نذهب لـ $V_3(2)$ أيضاً ونأخذ القرار المتخذ القرار المتخذ $V_3(2)$ هو $\boxed{1}$))

فتكون هي كمية الاستثمار في السنة الثالثة الـ

ويبقى للمستثمر $6-5=1$ وحدة.

كتابة الحل الأمثل ~~[illegible]~~ تنتهي المسألة. #

انتهت المحاضرة.

The end ^_^