/ /

المحاضرة العاشرة (عملي)

ان $\vec{r}_1 \sim \vec{r}_2 \Leftrightarrow$

$\exists \phi : I_2 \to I_1$

$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 \circ \phi$

ان تركيب دالتين غامرتين دالة غامرة
تركيب دالتين مستمرتين دالة مستمرة
تركيب دالتين متزايدتين تماماً دالة متزايدة تماماً

تمرين: اثبت ان التكافؤ بين التمثيلات الوسيطية هي: ١- انعكاسية
٢- تناظرية ٣- متعدية

الحل. ليكن لدينا التمثيل $(I, \vec{r})$ للدالة $\vec{r}$ نعرف

$\phi : I \to I$

$\phi(t) = t$

ϕ متزايدة تماماً لان $\phi'(t) = 1 > 0$
واضح انها مستمرة وغامرة واكثر من ذلك

$\forall t \in I : \vec{r} \circ \phi(t) = \vec{r}(\phi(t))$
$= \vec{r}(t)$

$\Rightarrow \vec{r} \circ \phi = \vec{r}$

$\vec{r}$ يكافئ نفسه.

التناظرية: لدينا الدالتين $(\vec{r}_1, I_1) \sim (\vec{r}_2, I_2)$ $\Leftarrow$

$\exists \phi : I_2 \to I_1$

$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 \circ \phi$

بما ان ϕ متزايدة تماماً فهي متباينة ايضاً
ϕ تقابل وهي مستمرة فالتقابل العكسي
ايضاً مستمر لكن ϕ^{-1} وهو التقابل
العكسي عندئذ

$\vec{r}_2 \circ \phi^{-1} = \vec{r}_1 \circ \phi \circ \phi^{-1}$

$\vec{r}_2 \circ \phi^{-1} = \vec{r}_1$

ومنه: ايضاً ان $\vec{r}_2$ تكافئ $\vec{r}_1$

متعدية: ليكن:

① $(\vec{r}_1, I_1) \sim (\vec{r}_2, I_2)$

② $(\vec{r}_2, I_2) \sim (\vec{r}_3, I_3)$ و

من ①

$\exists \phi_1 : I_2 \to I_1$

$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 \circ \phi_1$

ϕ_1 مستمرة متزايدة تماماً وغامرة

من ②

$\exists \phi_2 : I_3 \to I_2$

$\vec{r}_3 = \vec{r}_2 \circ \phi_2$

نفرض $\phi = \phi_1 \circ \phi_2$ (مستمرة وغامرة ومتزايدة تماماً)

$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 \circ \phi$

$\vec{r}_2 \circ \phi_2 = \vec{r}_1 \circ \phi_1 \circ \phi_2$

$\vec{r}_3 = \vec{r}_1 \circ \phi$

ومنه $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_3$ متكافئتان بالتالي التكافؤ
علاقة تكافؤ

تمرين: $t \to (\ln t, \sin \ln t, t)$

$]0, \infty[$

$\tau \to (\tau, \sin \tau, e^{\tau})$

$]-\infty, \infty[$

اثبت ان التمثيلين الوسيطين متكافئان.

الحل: ليكن

$\phi :]-\infty, \infty[\to]0, \infty[$

$\tau \to e^{\tau}$

$\vec{r}_1 \circ \phi(\tau) =$
$(\ln e^{\tau}, \sin \ln e^{\tau}, e^{\tau})$
$= (\tau, \sin \tau, e^{\tau})$
$= \vec{r}_2(\tau) \quad \forall \tau \in \mathbb{R}$

Scanned by CamScanner

$\Rightarrow \vec{r_1}\circ\phi = \vec{r_2}$

كما ان ϕ مستمرة وغامرة ومتزايدة تماماً

وبالتالي $\vec{r_1}$ مكافئ $\vec{r_2}$

(الحالة الاسية عامة على المستقر المثلي

موضحة مستقر الحالة الاسية)

تمرين: اوجد تمثيلاً وسيطياً للمنحني

الناتج عن تقاطع الاسطوانة

$x^2+y^2=1$

والمستوي: $x+y+z=1$

لاحوي جذوراً

الحل:

$$\vec{r}(t)=\begin{cases} x=\cos t\\ y=\sin t\\ z=1-(\cos t+\sin t)\end{cases}$$

تمرين:

اثبت ان التمثيلين الوسيطين المتكافئين

لهما المجموعة النقطية ذاتها

(r_1, I_1)

الحل:

نفرض L_1 المجموعة النقطية لـ $\vec{r_1}$ اي:

$\vec{r_1}(I_1)=\vec{OL_1}$

نفرض L_2 المجموعة النقطية لـ $(\vec{r_2}, I_2)$

فان $\vec{r_2}(I_2)=\vec{OL_2}$

$\vec{r_1}\sim\vec{r_2} \Leftarrow$

$\exists\, \phi : I_2 \to I_1$

بما ان ϕ غامرة فان:

$\phi(I_2)=I_1$

$\vec{OL_2}=\vec{r_2}(I_2)=r_1\circ\phi(I_2)$

$=r_1(I_1)=\vec{OL_1}$

$\Rightarrow \vec{L_1}=\vec{L_2}$

تمرين: اذا كان $\vec{r_1}\sim\vec{r_2}$ و P مضاعفة من

المرتبة m بالنسبة لـ $\vec{r_1}$ فانه مضاعفة من

المرتبة المضاعف اي المرتبة m بالنسبة لـ $\vec{r_2}$

الحل:

P مضاعفة من المرتبة m بالنسبة $\vec{r_1}$ فيكون:

$\vec{r_1}^{-1}(\vec{OP})=\{t_1,\dots,t_m\}$

(*) لا توجد $t\in I_1$ وتحقق:

$\vec{r_1}(t)=\vec{OP}$

ان $\vec{r_1}\sim\vec{r_2}$ ومنه

$\exists\, \phi : I_1 \to I_2$

$\vec{r_1}=\vec{r_2}\circ\phi$

$\vec{OP}=\vec{r_1}(t_i)=\vec{r_2}(\phi(t_i))$

$i=1,\dots,m$

نفرض ان $\tau_i=\phi(t_i)$ عندئذ

$\vec{OP}=\vec{r_2}(\tau_i);\ i=1\dots m$

نفرض جدلاً انه يوجد $\tau\in I_2$ مغاير لـ

$\tau_1,\dots,\tau_m$ بحيث:

$\vec{OP}=\cancel{\phi}\,\vec{r_2}(\tau)$

ولكن ϕ غامرة ومنه يوجد $t\in I_1$ تحقق:

$\phi(t)=\tau$

$\vec{r_2}(\phi(t))=\vec{r_2}(\tau)$

$\vec{r_1}(t)=\vec{OP}$

وهذا يناقض * اي ومنه الفرض الجدلي

خاطئ وبالتالي:

$\vec{r_2}^{-1}(OP)=\{\tau_1,\dots,\tau_m\}$

اي ان P مضاعفة من المرتبة m بالنسبة لـ $\vec{r_2}$

(تذكير)

تعريف: نقول عن دالة متجهة القيمة $\vec{r}$ انها من الصف C_n على مجال غير مفتوح اذا وجد لها ممدد من الصف C_n على مجال مفتوح اي اذا وجد دالة $\vec{\tilde{r}}$ من الصف C_n على مجال مفتوح يحوي I وبحيث

$$\vec{\tilde{r}}\big|_I = \vec{r}$$

تعريف: نقول عن منحنٍ متراص انه من الصف C_n اذا كان بين تمثيلاته الوسيطية المسموح بها واحد على الاقل $\vec{r} : [a,b] \to R^3$ من الصف C_n

المنحني النظامي من الصف C_n قطعياً:

نقول عن منحنٍ انه نظامي من الصف C_n قطعياً اذا كان بين تمثيلاته الوسيطية المسموح بها واحد على الاقل $\vec{r} : I \to R^3$ ووجدت تجزئة $\{t_0=a, t_1, ..., t_m=b\}$ لـ I حيث a و b طرفا I بحيث تكون $\vec{r}|_{[t_{i-1}, t_i]}$; $(i=2,...,m-1)$ من الصف C_n و $\vec{r}|_{]t_{i-1}, t_i[}$ نظامي وزيادة على ذلك

- $\vec{r}|_{[a=t_0, t_1]}$ ، $\vec{r}|_{[t_{m-1}, b]}$ اذا كان I مغلقاً
- فـ $\vec{r}|_{[a=t_0, t_1]}$ ، $\vec{r}|_{[t_{m-1}, b[}$ اذا كان I نصف مفتوح عند b
- و $\vec{r}|_{]a, t_1]}$ ، $\vec{r}|_{[t_{m-1}, b]}$ اذا كان I نصف مفتوح عند a
- $\vec{r}|_{]a, t_1]}$ ، $\vec{r}|_{[t_{m-1}, b[}$ اذا كان المجال $]a,b[$ مفتوح.

نقصد بتجزئة مجال I مجموعة $\{t_0, ..., t_m\}$ من نقاط ذلك المجال بحيث تحقق ان $t_0=a < t_1 < ... < t_m=b$ و $\{t_0, t_1, t_2, ..., t_m\}$ حيث $t_1, ..., t_{m-1} \in I$ و $t_0=a$ و $t_m=b$ اطراف المجال I عندما يكون مفتوح

ملاحظة:

عندما يكون منحنٍ نظامي من الصف C_n قطعياً فان المشتق من المرتبة n للدالة $\vec{r}$ في ⊛ سيكون غير مستمر او غير موجود او $\vec{r}'(t) = 0$ (في حال وجوده) عند النقاط $\{t_0, ..., t_m\}$ على الاكثر

تعريف:

اذا كان $\vec{r}'(t_0)$ غير موجود او كان موجود لكنه معدوم فاننا نسمي t_0 او رأس المتجه $\vec{r}(t_0)$ في المجموعة النقطية المرتبة نقطة شاذة في التمثيل $\vec{r}$ للمنحني الممثل بـ $\vec{r}$ واذا كانت هذه النقطة شاذة في تمثيل وغير شاذة في تمثيل اخر مسموح مماثل له فاننا نسمي هذه النقطة بنقطة شاذة غير اساسية لهذا المنحني اما اذا كانت هذه النقطة شاذة في كل التمثيلات المكافئة المماثلة للمنحني عند تغير الوسطاء المتقاربة فاننا نسمي هذه النقطة شاذة اساسية للمنحني.

ملاحظة: مستمرة مع متباينة ← مطردة

المطردة ← متباينة

الدالة مستمرة ومتباينة ومطردة تماماً على V ← تقابل عكسي مستمر له نفس الجهة

الاطراد.

(٣) المحاضرة الحادية عشر

(مراجعة)

$Id : (\mathbb{R}$ التوبولوجيا المتقطعة$) \to (\mathbb{R}$ التوبولوجيا المألوفة$)$ مستمر

$x \to I(x) = x$

$Id^{-1} : (\mathbb{R}$ التوبولوجيا المألوفة$) \to (\mathbb{R}$ التوبولوجيا المتقطعة$)$ غير مستمر

مبرهنة.

اذا كان $f : I \to J$ تابعاً حيث I و J مجالان من $\mathbb{R}$ فان الشرطين التاليين متكافئين

١- f تماثل استمراري (توبولوجي، تقابل ثنائي الاستمرار)

"أي تقابل مستمر وتابعه العكسي مستمر ايضاً"

٢- f خاص ومطرد تماماً على I

$f : I \to J$ تقابل مستمر على I $\Leftarrow$ f مطرد تماماً على I. طالما لم نحدد التوبولوجيا فانها التوبولوجيا المألوفة.

ملاحظة:

ذكرنا سابقاً ان نقطة مضاعفة من المرتبة n في تمثيل $\vec{r}$ تعتبر n نقطة مختلفة في المجموعة النقطية المرتبة للتمثيل (دون ان اقول مرتبة تعتبر النقطة المضاعفة نقطة واحدة) ونمايز نقطة عن اخرى من هذه النقاط بقيم الوسطاء

مثلاً اذا كانت P مضاعفة من المرتبة الثانية في تمثيل $\vec{r}$ هذا يعني انه توجد قيمتين مختلفتين t_1, t_2 من منطلق $\vec{r}$ بحيث يتحقق ما يلي:

$$\vec{OP} = \vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2)$$ متجهة الموضع لـ P

في هذه الحالة نعتبر P نقطتين مختلفتين في المجموعة النقطية المرتبة حيث ان النقطة الاولى هي النقطة الموافقة لـ t_1 والنقطة الثانية هي النقطة الموافقة لـ t_2

ملاحظة:

لتكن L منحنياً ممثلاً بالثنائية $(I, \vec{r})$ ولتكن P_0 النقطة من L الموافقة لـ t_0 في التمثيل $\vec{r}$ ($\vec{OP_0} = \vec{r}(t_0)$)

نقول عن النقطة P_0 انها نقطة شاذة للمنحني L في التمثيل $\vec{r}$ اذا وفقط اذا كان $\vec{r}'(t_0)$ غير موجود (اي $\vec{r}$ غير قابل للاشتقاق عند t_0) او $\vec{r}'(t_0) = \vec{0}$. اما اذا كان المشتق $\vec{r}'(t_0)$ موجود وغير معدوم فاننا نسمي النقطة P_0 نقطة نظامية لـ L في التمثيل $\vec{r}$

اذا كانت نقطة P_0 من منحني L موافقة لقيمة ما في تمثيل $\vec{r}$ وكانت T_0 قيمة متقابلة مع t_0 حيث T هو وسيط لتمثيل اخر مسموح به لـ L

(التمثيلين متكافئين على هذا تغير الوسيط ϕ والتابع ϕ يعطي ان $t_0 = \phi(T_0)$)

وكانت النقطة P_0 نظامية في التمثيل الاول وشاذة في التمثيل الثاني فاننا نسمي P_0 نقطة شاذة غير اساسية للمنحني L

اما اذا كانت P_0 نقطة شاذة في كل التمثيلات المسموح بها عن تغير الوسطاء المتقابلة فاننا نقول ان P_0 نقطة شاذة اساسية

مثال: لكن لدينا المنحنى

لكن $\vec{r}$ تمثيل لهذا المنحنى:

$\overrightarrow{OP_0} = \vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2)$

النقطة P_0 المناظرة لـ t_1 اعتيادية في $\vec{r}$

النقطة P_0 المناظرة لـ t_2 شاذة في $\vec{r}$

ع) وجود رأس في منحنى الدوال الاتجاهية

الاستقامات عند تلك الرؤوس والنقطة

شاذة كان المشتق غير موجود)

لنفرض ان $\vec{r_1}$ تمثيل اخر مسموح به للمنحنى

$\Leftarrow$ وجود دالة ϕ تجعل $\vec{r_1}$ و $\vec{r}$ متكافئين

$\Leftarrow$ $t_1 = \phi(T_1)$ و $t_2 = \phi(T_2)$

لنفرض ان P_0 المناظرة لـ T_1 شاذة في

$\vec{r_1}$ فان P_0 ستكون شاذة في لـ تطبيق

t_1

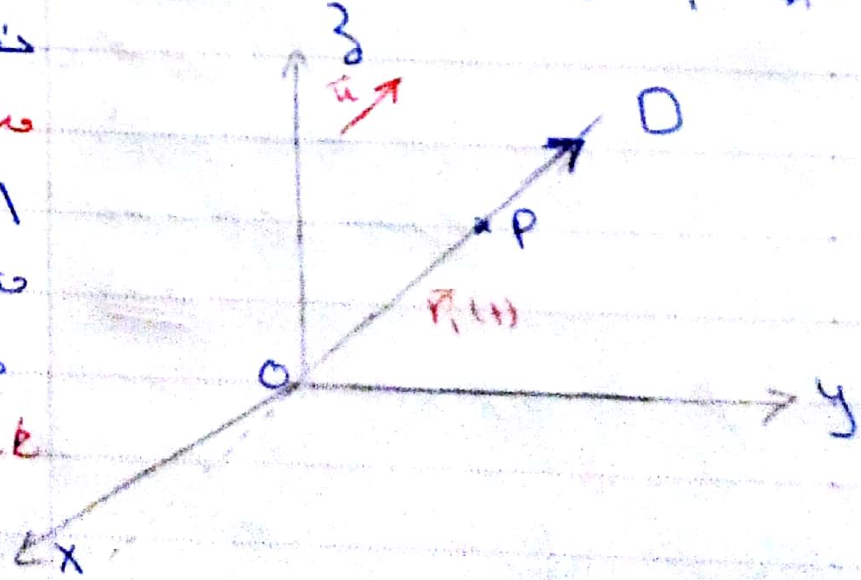
ولنفرض ان P_0 المناظرة لـ T_2 شاذة في $\vec{r_1}$

فان P_0 ستكون شاذة لـ تطبيق t_2

مثال (النقطة شاذة غير مطلقة).

ليكن D المستقيم المار من المبدأ والموازي

لمتجه ثابت $\vec{u}$ عندئذ:



كلا له التمثيل $\vec{r_1}(t) = t\vec{u} : t \in \mathbb{R}$

ع) OP موازي لـ u وبالتالي مضروب فيه $\vec{u}$)

$\vec{r_2}(t) = T^3 \vec{u} : T \in \mathbb{R}$

تمثيل مسموح به لـ D

ان D منحنى هندسي منتظم هنا المنحنى تمام

سيطه في كلا التمثيلين كما ان المبدأ هي نقطة

مناظرة لـ $t = 0$ في $\vec{r_1}$ لان $\vec{r_1}(0) = \vec{0}$

وهي نقطة مناظرة $T = 0$ في $\vec{r_2}$ لان $\vec{r_2}(0) = \vec{0}$

المبدأ نقطة نظامية في $\vec{r_1}$ ؛ هذا لان $\vec{r_1}'(0)$ موجود

و $\vec{r_1}'(0) = u \neq 0$ لكن المبدأ نقطة شاذة

في $\vec{r_2}$ لان $\vec{r_2}'(0) = 3(0) = 0$.

بالنتيجة المبدأ نقطة شاذة غير طبيعية؟

للمنحنى D

تمرين: اثبت ان $\vec{r_1}$ و $\vec{r_2}$ متكافئين

(اي ان المنحنى الممثل بـ $\vec{r_1}$ هو نفسه المنحنى الممثل

بـ $\vec{r_2}$)

الحل: ان دالة تغير الوسيط هي

$$\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\phi(T) = T^3$$

مستمرة ع $\mathbb{R}$ ومتزايدة ومشتقة هذه الدالة

$2T^2 \geq 0$ ولا ينعدم ع مجال محتوى في منطقة

فان هذه الدالة متزايدة تماماً اي النقطة O ستكون

نقطة معزولة.

ملاحظة: اذا كان مشتق دالة حقيقية أكبر او يساوي

الصفر ولا ينعدم ع مجال محتوى في منطقة فان الدالة

متزايدة تماماً والتالي نقاط المشتقة

معزولة.

ع - المنحنى D ليس منتظماً بسيطاً.

منحنى اللولب:

هو مسار نقطة تتحرك بسرعة ثابتة على طول القطعة المتحركة اسطوانة دائرية تدور بسرعة ثابتة حول محورها

اذا زودنا الفضاء بجملة محاور احداثية بحيث يكون المحور oz منطبق على محور الاسطوانة وبدءة حركة النقطة ... من الوضع الابتدائي للنقطة المتحركة فان معادلات الحركة

$$x = R\cos wt$$
$$y = R\sin wt$$
$$z = Vt$$

حيث R نصف قطر الاسطوانة و w السرعة الزاوية للاسطوانة والسرعة الثابتة للنقطة على طول المولد للاسطوانة.

المحاضرة الثانية عشر (عملي)

تمرين: التمثيلان الوسيطيان المتكافئان يحددان المجموعة النقطية المشتركة لهما بالترتيب ذاته.

الحل: ليكن لدينا

$$(\vec r_1, I_1) \sim (\vec r_2, I_2)$$

$\exists\, \phi : I_2 \to I_1$ مستمر متزايد تماما

$$\vec r_2 = \vec r_1 \circ \phi$$

نفرض ان رأس المتجه $\vec r_2(T_1)$ يسبق رأس المتجه $\vec r_2(T_2)$ (حيث $T_1, T_2 \in I_2$)

اذا كان $T_1 < T_2$

لنفرض ان

$$t_1 = \phi(T_1)$$
$$t_2 = \phi(T_2)$$

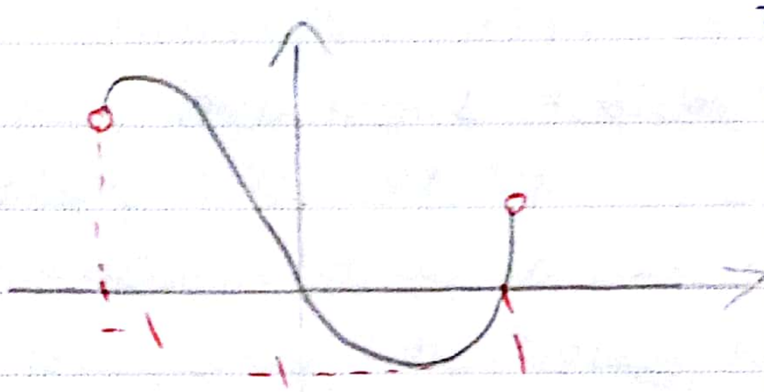
بما ان ϕ متزايدة فان $\phi(T_1) < \phi(T_2)$ تماما فان

t_1, T_1 تعينان النقطة نفسها في المجموعة النقطية المشتركة

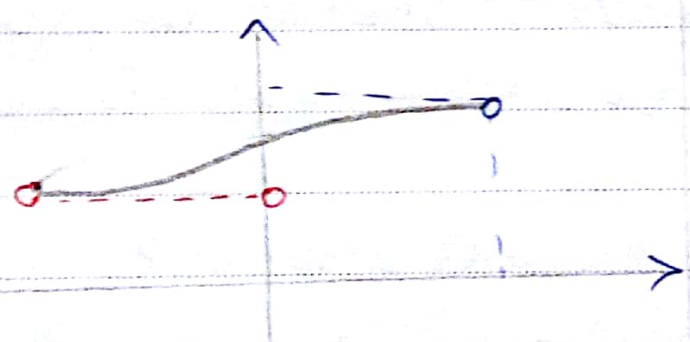
t_2, T_2 تعينان النقطة ذاتها في المجموعة المشتركة

$$t_1 < t_2$$

وهذا يعني ان رأس المتجه $\vec r_1(t_1)$ يسبق رأس المتجه $\vec r_1(t_2)$



المستقر الفعلي له هو $]-1,1[$ نلاحظ ان صورة المجال المفتوح هو مجال مغلق $[-1,1]$ يكون ان ϕ مستمر



صورة المجال المفتوح وفق التطبيق المستمر هو مجال مفتوح (ϕ متزايد تماما)

تمرين: اثبت ان اي تمثيل وسيطي لمنحني مفتوح معرف على مجال مفتوح

الحل

برهنة: نفرض ان $\phi : x \to \phi(x)$ مستمر متزايد

$$\phi(]a,b[) = \left]\lim_{x\to a} \phi(x), \lim_{x\to b} \phi(x)\right[$$

* اذا كان ℓ منحنياً مفتوحاً فيوجد
$\vec{r} :]a,b[\to \mathbb{R}^3$
تمثيل وسيطياً ($\vec{r}$ تمثيل وسيطي مسموح به)
لكن $\vec{r}_1 : I_1 \to \mathbb{R}^3$
تمثيلاً وسيطياً لـ ℓ مكافئاً له أي
$\phi :]a,b[\to I_1$ فيوجد $\vec{r} \sim \vec{r}_1$
مستمرة وغامرة ومتزايدة تماماً وبما أن ϕ
غامرة فإن $\phi(]a,b[) = I_1$
وبما أن ϕ مستمرة ومتزايدة تماماً نستنتج
المبرهنة أن I_1 مفتوح.

تمرين 3:

* أثبت أن كل منحني متراص يقبل تمثيلاً وسيطياً مسموح به معرف على $[0,1]$

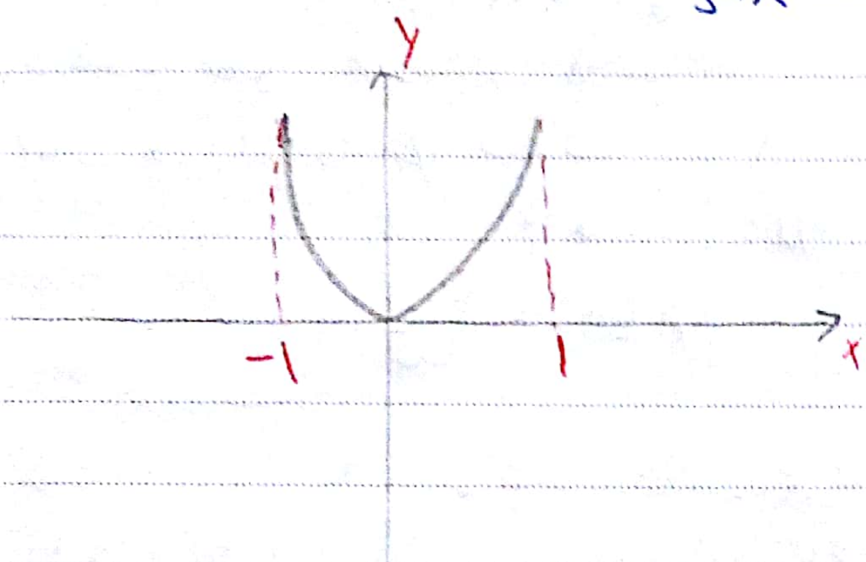
** أثبت أن كل منحني مفتوح يقبل تمثيلاً وسيطياً مسموح به معرفاً على $]0,1[$

الحل: *

ℓ منحني متراص و $\vec{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$
تمثيلاً وسيطياً مسموح به لـ ℓ نعرف الدالة
$\phi : [0,1] \to [a,b]$
$\phi(t) = (1-t)a + tb$
إن $\phi([0,1]) = [a,b]$
ومنه ϕ غامرة لأن صورة المنطلق هو المستقر
وإن $\phi'(t) = b - a > 0$ متزايدة
تماماً
وبالتالي ϕ مستمرة وغامرة ومتزايدة تماماً
(مستمرة من علاقة الحساب)
نعرف
$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 \circ \phi : [0,1] \to \mathbb{R}^3$
عندئذ يكون $\vec{r}_2$ مكافئاً لـ $\vec{r}_1$

في ** نناقش الحالة لأن المجال مفتوح

تمرين: أوجد تمثيل مكافئ لـ $\vec{r}_1$
$\vec{r}_1 : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$
$t \to (t, t^2)$
$y = x^2$



إن $\vec{r}_3 : [0,\pi] \to \mathbb{R}^3$
$t \to (\cos t, \frac{1+\cos 2t}{2})$
~~$\phi(t) = -\sin t > 0$~~
$\phi : [0,\pi] \to [-1,1]$
$\phi(t) = -\sin t > 0$
ϕ متناقصة تماماً على $[0,\pi]$ لأن
sin متزايدة (~~على المجال~~) في الربع الاول والثاني
ويوجد إشارة ناقص لذلك هي متناقصة
و ϕ مستمرة وغامرة وبالتالي $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_3$
متكافئان.

ملاحظة: هذا مثال عن دالة قابلة للاشتقاق
حتى اللانهاية ولكن غير تحليلية:

$$F(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

(ذكريني)

التمثيل الوسيطي اللولب يعطى من معادلات الحركة:

$\vec{r}_1$: $x = R\cos \omega t_1$

$y = R\sin \omega t_1$

$z = v t_1$; $t_1 \in \mathbb{R}$

ولنوجد تمثيل اخر مكافئ له:

نبحث عن الدالة ϕ ولتكن

$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\phi(t) = \frac{t}{\omega}$

تحقق مايلي:

(لا داعي للكتابة نعتبر $\omega \neq 0$ لأن ω هي السرعة الزاوية واذا كانت $\omega = 0$ فهذا يعني ان الاسطوانة لا تدور وبالتالي لايمكن ان تساوي الصفر اي $\omega \neq 0$)

1- ϕ مستمرة على $\mathbb{R}$ (كثير حدود)

2- $\phi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ (ϕ غامرة)

3- $\phi'(t_1) = \frac{1}{\omega} > 0 \Leftarrow \phi$ متزايدة تماماً

(لو كانت ω سالبة نضرب الدالة بـ (-1) اي نأخذ $\phi(t) = -\frac{t}{\omega}$ وبالتالي المشتق سيصبح أكبر من الصفر اما اذا لم نأخذ $\phi(t) = -\frac{t}{\omega}$ فان التمثيل سيكون معاكس ولنسميه مكافئ)

ومنه فان $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 \circ \phi$ هو تمثيل مكافئ لـ $\vec{r}_1$ وسيطي للولب

$\vec{r}_2(t) = \vec{r}_1 \circ \phi(t) = \vec{r}_1(\phi(t))$

$= (R\cos \omega(\phi(t)), R\sin(\omega \phi(t)), \frac{v}{\omega} t)$

$= (R\cos t, R\sin t, \frac{v}{\omega} t)$

نرمز بـ b لـ $\frac{v}{\omega}$ ومنه:

$\vec{r}_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\vec{r}(t) = (R\cos t, R\sin t, bt)$

هو تمثيل مسموح للولب حيث $b \neq 0$

* ان منحنى اللولب مفتوح لوجود تمثيل له $\vec{r}_2(t) = (R\cos t, R\sin t, bt)$ معرف على مجال مفتوح ($\mathbb{R}$ مفتوح)

* منظر أن مركباته تابع دالات جميع المركبات من الصف C^∞ بل أكثر من ذلك تحليلية فمنحنى اللولب من الصف C^∞ بل تحليلي لأن مركبات $\vec{r}$ جميعها تحليلية على $\mathbb{R}$

* منحنى اللولب منتظم لأن احد تمثيلاته وهو $\vec{r}_2$ قابل للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وان:

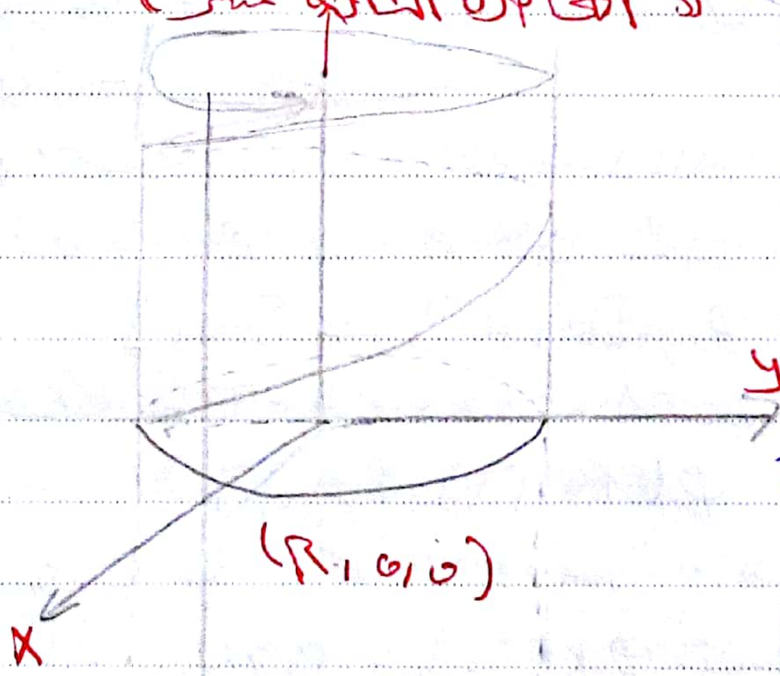
$\vec{r}_2'(t) = (-R\sin t, R\cos t, b) \neq 0$

لأن $b \neq 0$ ، $t \in \mathbb{R}$

* منحنى اللولب نظامي كذلك لأن $\vec{r}$ من الصف C^∞ وهو نظامي و $\vec{r}_2'(t) \neq 0$ ، $\forall t$

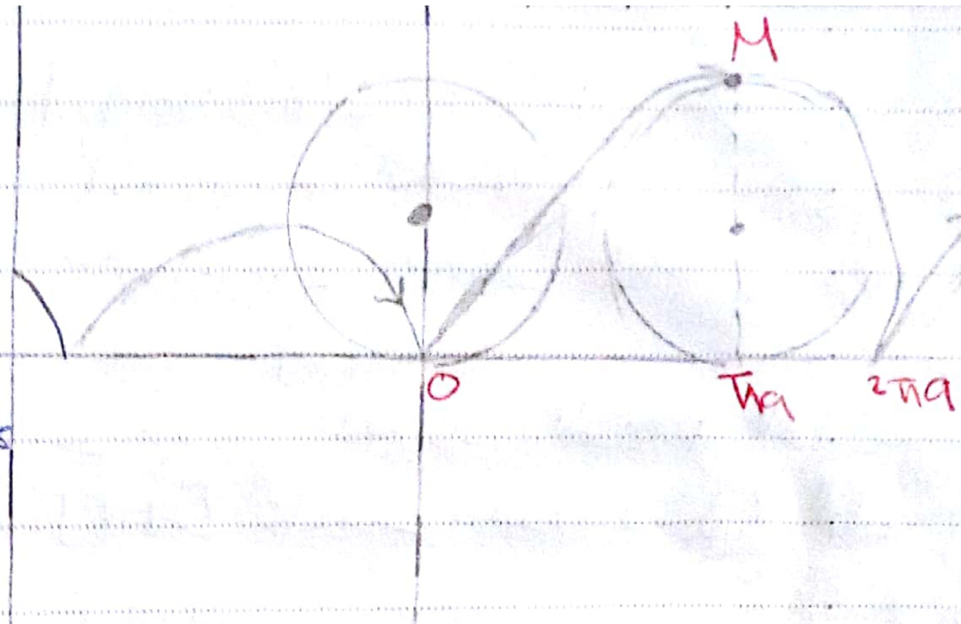
ولو لم نجد فلا نقدر نقول ان $\vec{r}'(t) \neq 0$

« المحاضرة الثالثة عشر »



الحلزوني (الهيليكوني):

هو منحنى مستوي وهو مسار نقطة من دائرة عندما تدحرج هذه الدائرة على مستقيم دون انزلاق



ان الدويري يمثل بالتمثيل الوسيطي التالي

$$\vec{r}\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \\ z = 0 \end{cases} : t\in\mathbb{R}$$

* المجموعة النقطية ليست قوساً بسيطاً

ان هذه المجموعة ليست محدودة لان x هي عبارة عن ثابت مضروب بمجموع تابعين احدهما محدود والاخر هو sint والاخر غير محدود هو t ومنه هذه المجموعة غير محدودة وبالتالي هذه المجموعة ليست متراصة كونها غير محدودة من جهة اخرى لو فرضنا جدلاً ان هذه المجموعة قوساً بسيطاً فهذا يعني وجود تمثيل وسيطي لها ليس من الضروري ان يكون مسموح به للدويري) مستمر ومتباين ع مجال مغلق وهذا يعني ان هذه المجموعة متراصة. ع هي صورة مجال مغلق (متراص) وفق مستمر هو متراص

فنحصل ع تناقض وذلك يعني ان الفرض اكبر خاطئ و المجموعة النقطية للدويري ليست قوساً بسيطاً

- الدويري منحني مغلق:

ع ان تمثيلة r معرفة ع مجال مغلق (لكن تمثيل جام ع مجال مفتوح)

- الدويري كلاسي من الصف C^{∞} كلاسي على $\mathbb{R}$ كاملها (لان جميع مركبات $\vec{r}$ كلاسية ع $\mathbb{R}$ كاملها)

sin ليس كثير حدود وهو تابع كلاسي لانه يكتب على شكل مجموع متسلسلة مجال تقاربه كامل $\mathbb{R}$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} \dots \quad \forall t\in\mathbb{R}$$

- نقاط الدويري ليست كلها منتظمة لان المشتقات ع $\mathbb{R}$ فان النقاط الشاذة ان وجدت هي النقاط الموافقة لحلول المعادلة

$$\vec{r}'(t) = \vec{0}$$

ومنه نكافئ

$$(a(1-\cos t), a\sin t, 0) = (0,0,0)$$

ومنه نكافئ الجملة:

① $1-\cos t = 0$

② $\sin t = 0$

حلول ① حيث:

$t = 2\pi k \ : k\in\mathbb{Z}$ فيما نقطة الضروري

حلول ② حيث: $t = \pi k \ : k\in\mathbb{Z}$ فيما الزوجي والفردي

الحلول المشتركة هي: $k\in\mathbb{Z}$ $\quad t_k = 2\pi k$

هي هذه النقاط ستكون موافقة للنقاط الشاذة للدويري في التمثيل $\vec{r}$ حيث رؤوس المتجهات $\vec{r}(t_k) = 1$ هي النقاط

$$P_k = (2\pi k a, 0, 0)$$

هل نقاط المنحني الدويري نقاط بسيطة؟

نعم. جميع نقاط الدويري نقاط بسيطة (ع داعي لنتولى التمثيل $\vec{r}$ لان اي تمثيل سيقول انها بسيطة)

$x' = a(1-\cos t) \geq 0$ ولا تنعدم على اي مجال جزئي من $\mathbb{R}$ فان x متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$ $\Leftarrow$ x متباينة على $\mathbb{R}$ $\Leftarrow$ $\vec r$ متباينة على $\mathbb{R}$

وهذا يعني ان جميع نقاط الدويري بسيطة في $\vec r$

(كذ) ثابت مركبة في دالة متجهة الشعاعية (اي ثابت الدالة)

ملاحظة: اذا كانت مرتبة اول مشتق لتمثيل $\vec r$ غير معدوم عند نقطة شاذة زوجية فان النقطة الشاذة ستكون شاذة اساسية

$\vec r''(t) = (a\sin t, a\cos t, 0)$

$\vec r''(t_k) = \vec r''(2\pi k) = (0, a, 0) \neq 0$

$\Leftarrow$ P_k شاذة اساسية

الوسيط الطبيعي:

هو نوع خاص بتمثيل وسيطي مجموعة يسمى التمثيل الوسيطي الطبيعي ولاجل ذلك نحتاج الى بعض التعاريف والمبرهنات.

التعريف:

ليكن $\vec r$ تمثيلاً وسيطياً معرفاً على مجال I وليكن $[a,b]$ مجالاً جزئياً من I ان التجزئة للمجال $[a,b]$ هي مجموعة

$P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$

من نقاط المجال $[a,b]$ تحقق ما يلي:

$t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b$

(التجزئة P)

نعرف اي تجزئة P مجموعة S_p معرف بالمساواة التالية:

$$S_p = \sum_{k=1}^{n} \|\vec r(t_k) - \vec r(t_{k-1})\|$$

المقصود هو الطول المتجزئ

نسمي الحد الاعلى الاعظمي $\sup$ لهذه المجاميع اي $\sup S_p$ من اجل جميع التجزئات الممكنة P للمجال $[a,b]$ طول التمثيل في المجال المغلق $[a,b]$

اذا كان $\sup S_p < \infty$ فاننا نقول ان التمثيل $\vec r$ طريق او قابل للقياس في المجال المغلق $[a,b]$

اذا كان $I = [a,b]$ فاننا نسمي التمثيل طريق او نقول انه تمثيل قابل للقياس.

تعريف:

نقول عن دالة انها مستمرة قطعياً على مجال اذا كانت مستمرة على كامل المجال باستثناء عدد منته من نقاط الانقطاع من النوع الاول

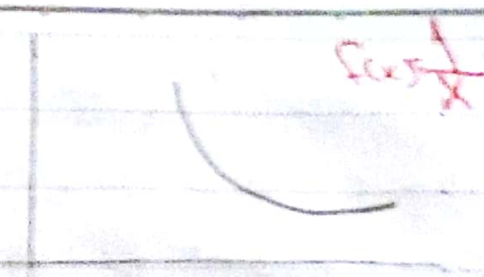
شرح:

نقطة الانقطاع لدالة نقطة تكون الدالة غير مستمرة عندها وسبب عدم الاستمرار قد يكون عدم وجود النهاية (النهاية ∞) او النهاية من اليمين لا تساوي النهاية من اليسار)

اذا كانت النهاية من اليمين موجودة ومحددة ومن اليسار موجودة ومحددة لكن غير متساويتين تكون نقطة الانقطاع هذه من النوع الاول ويكون القفزة بينهما محدودة ومن النوع الثاني تكون النهاية من اليمين او من اليسار ∞ وتكون القفزة غير محدودة تسمى نقطة الانقطاع الجوهري

مبرهنة: اذا كان $\vec{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ تمثيلاً نظامياً من الصنف C_1 قطعياً فان $\vec{r}$ قابل للتعديل كما ان طول هذا الاخير يعطى بالعلاقة

$$\ell(\vec{r}) = \int_a^b \|\vec{r}\,'(t)\| \, dt$$



مبرهنة: اذا كان r_1 و r_2 تمثيلين نظاميين من الصنف C_1 قطعياً لـ C متكافئين فان طول $\vec{r}_1$ يساوي طول $\vec{r}_2$

الجزء دالة القطاع هو أكبر ساس أدنى من ... ودجيد هب الى ∞ بشكل متناقص ... مك ... متناقصة اكبار.

- تابع الجزء الصحيح في $\mathbb{R}$ غير مستمر قطعياً
- (كل دالة مستمرة في مجال) لأن عدد نقاط الانقطاع غير منتهي في الحالة الأولى
- كل دالة تكون مستمرة في مجال تكون مستمرة قطعياً على ذلك العكس غير صحيح

تعريف:

نقول عن دالة إنها مستمرة قطعياً محلياً في مجال اذا كانت مستمرة قطعياً في كل مجال متراص من مجال تعريفها. دالة الجزء الصحيح دالة مستمرة محلياً قطعياً

مبرهنة: اذا كانت f دالة مستمرة قطعياً محلياً في مجال I فان الدالة $F(t)$ المعرفة بالمساواة

$$F(t) = \int_{t_0}^{t} f(u)\,du \quad [t_0, t]$$

مع t_0 نقطة مثبتة من I و t نقطة كيفية من I فان الدالة مستمرة في I وان

$$\frac{dF}{dt}(t) = f(t)$$

عند كل t من مجموعة استمرار الدالة f

«« المحاضرة الرابعة عشر »» (عملي)

تمرين: اثبت وجود دالة غامرة مستمرة متزايدة تماماً من المجال $]-\infty, \infty[$ الى المجال $]0,1[$

الحل:

$$tg : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to]-\infty, \infty[$$

دالة مستمرة غامرة متزايدة تماماً في المجال $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

والتقابل العكسي أيضاً مستمر

$$tg^{-1} :]-\infty, \infty[\to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$t \to tg^{-1}(t) = u$$

هي دالة مستمرة غامرة متزايدة تماماً لأن

$$(tg^{-1}(t))' = \frac{1}{1+t^2} > 0$$

لناخذ الدالة

$$h : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to]0,1[$$

$$h(u) = \frac{u + \frac{\pi}{2}}{\pi} = \frac{u}{\pi} + \frac{1}{2}$$

دالة مستمرة غامرة متزايدة تماماً لأن $\frac{1}{\pi} > 0$

$$\phi = h \circ tg^{-1} :]-\infty, \infty[\to]0,1[$$

تمرين: اثبت انه لا يوجد نقاط شاذة للمنحني * معرف بالشكل

$\vec{r}:]-2\pi, 2\pi[\to R^3$

$t \to (1+\cos t, \sin t, 2\sin\frac{t}{2})$

ثم ان المنحني المعين برهن ان المنحني يقع على الكرة التي مركزها O ونصف قطرها 2 وعلى الاسطوانة

$(x-1)^2 + y^2 = 1$

الحل:

نشتق من المرتبة الاولى لنرى اذا كان يوجد نقاط شاذة ام لا.

$\vec{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, +\cos\frac{t}{2})$

ايجاد النقطة الشاذة يكافئ ايجاد حلول المعادلة $\vec{r}'(t) = 0$

$\iff (-\sin t, \cos t, \cos t) = (0,0,0)$

لكن $\sin t$ و $\cos t$ لا تنعدمان معاً

فان $\vec{r}'(t) \neq 0$.

الطريقة الأولى: $\forall t \in]-2\pi, 2\pi[$

$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{1+\cos^2\frac{t}{2}} \geq 1$

$\Rightarrow \vec{r}'(t) \neq 0$

ومنه ليس هناك نقاط شاذة للمنحني المعطى

* الكرة التي مركزها O ونصف قطرها 2 لها المعادلة:

$x^2+y^2+z^2 = 4$

$(1+\cos t)^2 + \sin^2 t + 4\sin^2\frac{t}{2} = 2 + 2\cos t + 2(1-\cos t) = 4$

ومنه فان نقاط المنحني المعطاة واقعة على الكرة.

$(\sin^2\frac{t}{2} = \frac{1-\cos 2t}{2})$

$(x-1)^2 + y^2 = 1$

$(1+\cos t - 1)^2 + \sin^2 t = 1$

ومنه نقاط المنحني الممثل بـ $\vec{r}$ واقعة على تلك الاسطوانة

تمرين: (هام جداً)

ليكن L منحنياً ممثلاً بـ:

$\vec{r}(t) = (a(t-\sin t), a(1-\cos t), 0)$

$t \in R$

1- ماذا يسمى L؟ وإلى أي نوع ينتمي؟

2- هل لهذا المنحني نقاط شاذة؟ عينها إن وجدت وبين نوعها

الحل:

1- هو منحني الدويري وبما ان المركبات تحليلية ع R فانه من الصف C^ω

2- تم حلها في النظري

تمرين:

احسب طول القوس:

$\vec{r}(t) = (3\operatorname{ch}2t, 3\operatorname{sh}2t, 6t)$

$: 0 \leq t \leq \pi$

$\vec{r}'(t) = (6\operatorname{sh}2t, 6\operatorname{ch}t, 6)$

$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{36(\operatorname{sh}2t)^2 + 36(\operatorname{ch}2t)^2 + 36}$

$= 6\sqrt{(\operatorname{sh}2t)^2 + (\operatorname{ch}2t)^2 + 1}$

$= 6\sqrt{(\operatorname{ch}2t)^2 + (\operatorname{ch}2t)^2}$

$= 6\sqrt{2(\operatorname{ch}2t)^2}$

$= 6\sqrt{2}\operatorname{ch}2t$

$\boxed{\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1}$

لناخذ تكاملة

$L(r) = \int_0^{\pi} 6\sqrt{2}\operatorname{ch}2t\, dt$

$$= \frac{6\sqrt{2}}{2}\left[sh\,2t\right]_0^{\pi}$$

$$= 3\sqrt{2}\left[sh\,2\pi - 0\right]$$

$$= 3\sqrt{2}\,sh(2\pi)$$

(تذكير)

- ليكن $\vec r: I \to R^3$ تمثيلاً وسيطياً نظامياً من الصف C_k قطعياً حيث $k \geq 1$ لمنحنى ℓ نستطيع تعريف وسيط جديد بالمساواة التالية

$$s = \int_{t_0}^{t} \|\vec r'(u)\|\,du$$

طويلة المتجه

حيث t_0 نقطة ثابتة من I، t_1 كيفية من I

(يمكننا أن نوجد s المبرهنة رقم 1)

الدالة التي تقرن كل متجه بطوله هي دالة مستمرة

$R^3 \to R^+$

$V = (x,y,z) \to |V| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

هي دالة مستمرة لأنها تركيب مستمرتين وتطبيق $\in R$

ملاحظة: اذا كانت الدالة $\vec r$ من الصف C_1 فإن $\vec r'$ من الصف C_0

(اذا كانت الدالة $\vec r$ من الصف ، فإن $\vec r'$)

اذا كانت الدالة $\vec r$ مستمرة قطعياً فإن $\vec r'$ مستمرة قطعياً

- تركيب $\vec r$ سيعطي دالة مستمرة قطعياً وأكثر من ذلك ستكون s دالة مستمرة وأكثر $\frac{ds}{dt} = \|\vec r'(t)\| \geq 0$ لأنه نظيم

صحيح عند كل t في مجموعة استمرار $\vec r'$

ما المقصود بـ ds ؟

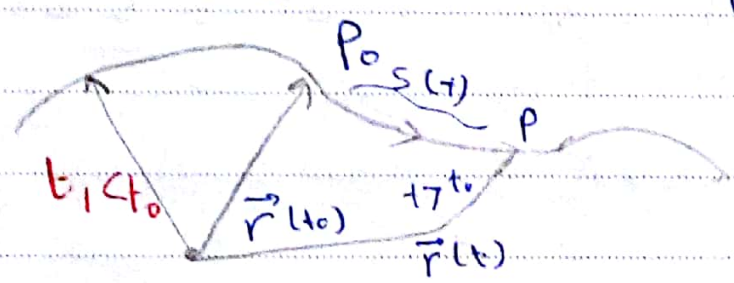
لو أخذنا $[t_0,t] \subseteq I$ مغلقة $\vec r$ قطعياً في المجال $\forall\, t_1, t_0 \in I$ ، $[t_0,t]$ فإن $[t_0,t]$ مغلق والدالة من الصف C_1 قطعياً ومنه $\vec r$ قطعياً

اذا $s(t)$ تمثل طول $\vec r$ في المجال $[t_0,t]$ وهو طول قوس من المنحنى ℓ بين رأسي المتجهين $\vec r(t_0)$ ، $\vec r(t)$

$\frac{ds}{dt}$ ، $\|\vec r'(t)\| > 0$

على كل مجال I باستثناء مجموعة منتهية منها (وهي نقاط تجزئة)

عدد منته



$\Longleftarrow$ s دالة متزايدة تماماً لأن ($\frac{ds}{dt} > 0$) ومنه تساوي الصفر على أي مجال جزئي من I

لنفرض أن $J = s(I)$ صورة I (المستقيم الحقيقي) مجال وله نفس طبيعة I

دالة s متزايدة تماماً مستمرة (صورة المجال وفقها سيكون مجال له نفس النوع)

الآن لدينا $s: I \to J$ ، $t \to s(t)$ دالة مستمرة متزايدة تماماً وغامرة لأنها تقابل

ولها تقابل عكسي s^{-1} نرمز بـ ϕ ،

ϕ دالة مستمرة ومتزايدة تماماً وغامرة

($\phi: J \to I$ ، $s \to t = \phi(s)$ حسب مبرهنة)

لنعرف التمثيل $r^*: J \to R^3$ بالمساواة التالية:

$$\vec r^*(s) = \vec r(\phi(s))$$

- $\vec r^*$ تمثيل مكافئ لـ $\vec r$ بناءً (كنتيجة لما سبق) لوصوف

الحالة ϕ (تحقق شروط سابقة لجعل المساواة صحيحة

نسمي التمثيل $\vec{r}^*$ بالتمثيل الوسيط الطبيعي للمنحني ℓ انطلاقاً من التمثيل $\vec{r}$ كما نسمي وسيطه s بالوسيط الطبيعي للمنحني ℓ ونسمي s الوسيط القوسي للمنحني ℓ ونسمي عملية تحويل المنحني ℓ بتمثيل مثل $\vec{r}^*$ عملية وسيط طبيعي لـ ℓ

نسمي رأس المتجه $\vec{r}(t_0)$ مبدأ قياس الطول القوسي للمنحني ℓ

(- في التمثيل الوسيطي الطبيعي s يعني انتقال ان s هي القياس الجبري لطول القوس من رأسي المتجهين $\vec{r}(t_0)$, $\vec{r}(t)$

لأن الفرق من الوسيط الطبيعي الاول والثاني ثابت)

سنرمز لـ $\vec{r}(s)$ للتمثيل الطبيعي للمنحني ℓ انطلاقاً (انطلاقاً من) من التمثيل $\vec{r}$

سنرمز $\vec{r}'(s)$ لمشتق $\vec{r}$ بالنسبة للوسيط الطبيعي s

والعلاقة بينهما $\vec{r}(s) = \frac{dr}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{dr}{dt}$

$$\vec{r}'(s) = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}$$

وهي محققة بعكس الحالة آ او لا لكل t من I باستثناء عدد منته من نقاط I