المنحنيات

/ /

* أثبت كون مجموعة نقطية ما قوس بسيط:
نوجد تمثيلاً $\vec{r}$ لهذه المجموعة النقطية (قد يكون معطى) ونثبت أن:
1) $\vec{r}$ مستمرة على منطلقها (مركباتها مستمرة)
2) $\vec{r}$ متباينة على منطلقها، ويتم ذلك بأحد ثلاث طرق:
- الدالة متزايدة أو متناقصة تماماً $\Leftarrow$ متباينة.
- إحدى مركبات $\vec{r}$ متباينة $\Leftarrow$ $\vec{r}$ متباينة.
- من تعريف التباين: تساوي الصور $\Leftarrow$ تساوي العناصر.
3) مجموعة قيم $\vec{r}$ هي المجموعة النقطية نفسها
ملاحظة: إذا أوجدنا تمثيلاً للمجموعة النقطية لا يحقق الشروط فهذا لا يعني أن المجموعة النقطية ليست قوساً بسيطاً بل إن هذا التمثيل غير مفيد في إثبات ذلك وقد يثبت غيره.

---

* أثبت كون مجموعة نقطية ما منحنٍ هندسي:
نوجد تمثيلاً $\vec{r}$ لهذه المجموعة النقطية (قد يكون معطى) ونثبت أن:
1) $\vec{r}$ مستمرة على منطلقها.
2) $\vec{r}$ متباينة محلياً، ويتم ذلك بإحدى طريقتين:
- $\vec{r}$ متباينة $\Leftarrow$ $\vec{r}$ متباينة محلياً.
- إثبات أن $\vec{r}$ متباينة محلياً حسب التعريف (المحاضرة السادسة)
3) مجموعة قيم $\vec{r}$ هي المجموعة النقطية نفسها.
ملاحظة: أيضاً بعض التمثيلات قد لا تفيد في إثبات المطلوب، ولكن قد يوجد تمثيلات أخرى تفي بالغرض وتحقق الشروط:

---

* أثبت تكافؤ التمثيلين الوسيطين:

$$\vec{r}_1 : I_1 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad , \quad \vec{r}_2 : I_2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

نوجد دالة ϕ متزايدة تماماً ومستمرة وغامرة:

$$\phi : I_2 \longrightarrow I_1$$
$$\tau \longmapsto \phi(\tau) = t$$

وتحقق $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 \circ \phi$

* إيجاد التمثيل الوسيطي لمنحنٍ :

1) إما أن نُعطى التمثيل الوسيطي بشكل صريح على شكل دالة متجهية :

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad ; a \leq t \leq b$$

2) أو أن نُعطى المعادلات الوسيطية للمنحني فتكون هي مركبات $\vec{r}$:

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t) \quad , z = z(t)$$

3) أو أن نُعطى معادلات ديكارتية للمنحني ونوجد نحن التمثيل الوسيطي منها (حتى لو لم يطلب ذلك) . مثال 6 ص125

4) أو أن يُذكر اسم منحنٍ معروف تمثيله الوسيطي : (حفظ)

_ الدائرة التي مركزها (x_0, y_0) ونصف قطرها a ومرسومة مرة واحدة :

$$\vec{r}(t) = (a\cos t + x_0 , a\sin t + y_0 , 0) \quad ; 0 \leq t \leq 2\pi$$

_ منحني ورقة البرسيم :

$$\vec{r}(t) = (\cos(3t)\cos t , \cos(3t)\sin t , 0) \quad ; \quad 0 \leq t \leq \pi$$

_ منحني اللولب :

$$\vec{r}(t) = (a\cos t , a\sin t , bt) \quad ; -\infty < t < \infty$$

_ منحني السيكلوئيد (الدويري) :

$$\vec{r}(t) = (a(t - \sin t) , a(1 - \cos t) , 0) \quad ; -\infty \leq t \leq \infty$$

_ المنحني السحبي :

$$\vec{r}(t) = \left(a\left(\cos t + \ln tg \frac{t}{2}\right) , a\sin t , 0\right) \quad ; 0 < t < \pi$$

---

* أثبت أن التمثيل (المنحني) من الصف C_n .

كل مركباته من الصف C_n (أي مشتقاتها حتى المرتبة n موجودة ومستمرة) .

---

* أوجد طول الطريق الذي تمثيله $\vec{r}(t)$ على المجال $[a,b]$:

$$l = \int_a^b \|\vec{r}'(t)\| \, dt$$

/ /

* إيجاد التمثيل الطبيعي لمنحنٍ:

الوسيط الطبيعي: $s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\vec{r}'(u)\|\, du$

حيث t_0 نقطة مثبتة كيفية من مجال $\vec{r}$.

التمثيل الطبيعي هو تركيب لمركبات $\vec{r}$ مع الدالة $t(s)$ معكوسة الدالة $s(t)$.

أي: $\vec{r}(s) = \left(x(t(s)),\ y(t(s)),\ z(t(s))\right)$

---

* أوجد النقاط الشاذة للمنحني الممثل بالتمثيل $\vec{r}$، ثم حدد نوعها.

إن النقاط الشاذة بالنسبة للتمثيل $\vec{r}$ هي النقاط التي يكون عندها المشتق $\vec{r}'$ غير موجود أو موجود ومعدوم.

بداية نبحث عن النقاط التي يكون عندها $\vec{r}'$ غير موجود ونقول إنها نقاط شاذة.

ثم نبحث في بقية النقاط عن النقاط التي تعدم $\vec{r}'$ ونقول أيضاً إنها نقاط شاذة.

ملاحظة: إذا كان $\vec{r}'$ موجوداً عند جميع القيم لـ t فيجب ذكر ذلك وأن النقاط الشاذة ناتجة فقط عن انعدام المشتق ثم نوجدها.

_ تعيين نوعها (أساسية أو غير أساسية):

نبحث عن أول مشتق غير معدوم عند كل نقطة من النقاط الشاذة:

فإذا كانت مرتبته زوجية $\Leftarrow$ النقطة شاذة أساسية.

أما إذا كانت مرتبته فردية $\Leftarrow$ النقطة شاذة غير أساسية.

---

* إيجاد الزاوية بين منحنيين في نقطة مشتركة P_0:

$$\cos\phi = \frac{\vec{r}_1'(t_0)\cdot\vec{r}_2'(\tau_0)}{\|\vec{r}_1'(t_0)\|\cdot\|\vec{r}_2'(\tau_0)\|}$$

---

* أوجد ثلاثية فرينيه في نقطة كيفية من المنحني أو في نقطة محددة معطاة:

$$\vec{t} = \frac{\vec{r}'(t_0)}{\|\vec{r}'(t_0)\|}\ ,\quad \vec{b} = \frac{\vec{r}' \wedge \vec{r}''}{\|\vec{r}' \wedge \vec{r}''\|}\ ,\quad \vec{n} = \vec{b}\wedge\vec{t}$$

/ /

* تعيين المستقيم المماس - المستقيم الناظم - المستقيم ثنائي الناظم - المستوي الملاصق - المستوي الناظم - المستوي المقوم للمنحني في نقطة ما منه أو في نقطة محددة معطاة.

المستقيم المماس $\vec{R} = \vec{r}(t_0) + \lambda \vec{t}(t_0)$

المستقيم الناظم الأساسي $\vec{R} = \vec{r}(t_0) + \lambda \vec{n}(t_0)$

المستقيم ثنائي الناظم $\vec{R} = \vec{r}(t_0) + \lambda \vec{b}(t_0)$

المستوي الملاصق $[\vec{R} - \vec{r}(t_0), \vec{t}, \vec{n}] = 0$

المستوي الناظم $[\vec{R} - \vec{r}(t_0), \vec{n}, \vec{b}] = 0$

المستوي المقوم $[\vec{R} - \vec{r}(t_0), \vec{t}, \vec{b}] = 0$

---

* أوجد التقوس والالتفاف لمنحنٍ في نقطة كيفية أو في نقطة محددة معطاة:

نميز حالتين:

1) إذا كان المنحني مستوياً:

$$k = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad , \quad \tau = 0$$

2) إذا لم يكن المنحني مستوياً: (أو لا نعرف).

$$k = \frac{\|\vec{r}' \wedge \vec{r}''\|}{\|\vec{r}'\|^3} \quad , \quad \tau = \frac{[\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''']}{\|\vec{r}' \wedge \vec{r}''\|^2}$$

---

* أثبت أن المنحني هو منحنٍ سوي (مستوي):

نحسب الالتفاف τ فإذا كان معدوماً كان المنحني سوياً.

---

* أوجد المعادلتين الطبيعيتين لمنحنٍ:

أولاً نوجد التمثيل الطبيعي ذو الوسيط الطبيعي s ثم نوجد التقوس والالتفاف بدلالة s، فتكون المعادلتان الطبيعيتان للمنحني هما:

$$s \longrightarrow k(s) \quad , \quad s \longrightarrow \tau(s)$$

* أوجد كل مما يلي :
1) مركز التقوس في نقطة P_0 من المنحني :
2) المحل الهندسي لمراكز تقوس المنحني .
3) المستقيم القطبي
4) دائرة التقوس .

1) $\vec{R} = \vec{r}(t_0) + \frac{1}{k}\vec{n}$

2) $\vec{R}(t) = \vec{OC} = \vec{r}(t) + \frac{1}{k}\vec{n}$

3) $\vec{R}(\lambda) = \vec{OC} + \lambda\vec{b}$

4) إن دائرة التقوس هي عبارة عن تقاطع المستوي الملاصق مع الكرة التي مركزها هو مركز التقوس C ونصف قطرها $\frac{1}{k}$.
نوجد معادلة كل من المستوي الملاصق والكرة المذكورة فتكون دائرة التقوس هي المنحني الناتج عن تقاطعهما .

* هل يصلح التمثيل $\vec{r}$ (المعطى) لإثبات كون مجموعة نقطية ما سطراً بسيطاً لسطح؟

إذا كانت $\vec{r}$ متباينة ومستمرة ومعرفة على مجموعة بسيطة الترابط فتكون المجموعة النقطية الممثلة بها سطراً بسيطاً لسطح.

أما إذا اختل أحد الشروط المذكورة فإنها لن تصلح لإثبات المطلوب، ولكن قد يوجد غيرها يثبت المطلوب.

---

* أثبت أن التمثيلين التاليين متكافئين:

$$\vec{r}_1 : R_1 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad , \qquad \vec{r}_2 : R_2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u^1, u^2) \longmapsto \vec{r}_1(u^1, u^2) \qquad\qquad (v^1, v^2) \longmapsto \vec{r}_2(v^1, v^2)$$

توجد دالة: $\phi : R_2 \longrightarrow R_1$

$$(v^1, v^2) \longmapsto (u^1, u^2) = \left(\phi_1(v^1, v^2) \, , \, \phi_2(v^1, v^2)\right)$$

بحيث تحقق:

1) $$J\phi = \frac{\partial(\phi_1, \phi_2)}{\partial(v^1, v^2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial v^1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial v^2} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial v^1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial v^2} \end{vmatrix} > 0$$

2) $$\vec{r}_1 \circ \phi = \vec{r}_2$$

---

* أوجد النقاط الشاذة في التمثيل $\vec{r}$.

إن النقاط التي لا يكون عندها أحد المشتقين الجزئيين $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u^2}$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u^1}$ موجوداً هي نقاط شاذة في التمثيل $\vec{r}$

نبحث في بقية النقاط عن النقاط التي تعدم الجداء الخارجي $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u^1} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^2}$ فتكون أيضاً نقاط شاذة في التمثيل $\vec{r}$.

ملاحظة: إذا كان المشتقان الجزئيان موجودان عند كل النقاط فيجب أن نذكر أن النقاط الشاذة في $\vec{r}$ إن وجدت فستكون ناتجة عن انعدام الجداء الخارجي ثم نوجدها.

---

* أوجد الإحداثيات المنحنية للنقطة P_0.
نوجد قيم الوسيطين u^1, u^2 عند P_0 فتكون هي الإحداثيات المنحنية لـ P_0.

---

* عين معادلة المستوي المماس للسطح والمستقيم الناظم على السطح، ومتجه واحدة الناظم للسطح في النقطة P_0.

المستوي المماس:
$$\left[\overrightarrow{P_0Q}\ ,\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^1}\ ,\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^2}\right]_{(u^1_0, u^2_0)} = 0$$

إذا كان:
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u^1} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^2} = (a, b, c)$$

فإن المستقيم الناظم يعطى:
$$\frac{X - x_0}{a} = \frac{Y - y_0}{b} = \frac{Z - z_0}{c}$$

ومتجه واحدة الناظم هو:
$$\vec{N} = \frac{(a,b,c)}{\|(a,b,c)\|} = \frac{(a,b,c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

---

* إما أن يكون تمثيل السطح معطى أو أن يذكر اسم سطح معروف.
السطح المطلوب فقط تمثيله الوسيطي هو الكرة:
$$\begin{cases} x = a\cos\theta\cos\phi \\ y = a\cos\theta\sin\phi \\ z = a\sin\theta \end{cases}$$
حيث $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $\frac{-\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$
وهو السطح الكروي الذي مركزه O ونصف قطره a.
