أسئلة الدورة الفصلية الإضافية (٢٠١٦-٢٠١٧) : تحليل عددي (١)

السؤال الأول (20 درجة) :

لتكن الدالة $f(x) = \cos\left(\frac{x}{3}\right)$ احسب خطأ الاقتطاع المرتكب على المجال $[0, 2\pi]$ من أجل $x = 0.01$ و $n = 2$ علماً أن $\left(\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \ldots\right)$

السؤال الثاني (20 درجة) :

لتكن لدينا المعادلة $e^x + x = 0$ ، المطلوب :

1) استخدم طريقة نيوتن للحصول على جذرين تقريبيين للمعادلة السابقة من أجل التقريب الابتدائي $x_0 = 0$ واحسب الخطأ المرتكب عند حساب كل جذر ؟

2) ماهي مرتبة التقارب لهذه الطريقة وأوجد ثابت التقارب ؟

السؤال الثالث : (20 درجة) :

استخدم طريقة شبه المنحرف المركبة من أجل $n = 4$ لإيجاد قيمة تقريبية للتكامل :

$$I = \int_0^1 (\tan(x) - 2x)\, dx$$

السؤال الرابع : (20 درجة) :

أوجد كثيرة حدود الاستيفاء باستخدام طريقة لاغرانج للبيانات الآتية :

x_i	2	3	-1	4
$f(x_i)$	1	2	3	4

ثم احسب $f(0)$

السؤال الخامس : (20 درجة) :

استخدم جميع الصيغ الممكنة لحساب المشتق الأول للدالة f عند النقطة $x = 0.7$ مستفيداً من البيانات الآتية :

x_i	0.5	0.7	0.8
$f(x_i)$	1.64872	2.13375	2.5396

انتهت الأسئلة ☺

تحليل عددي (1) : (٢٠١٦-٢٠١٧) حل أسئلة الدورة الفصلية الإضافية

حل السؤال الأول :

$$\cos\left(\frac{x}{3}\right) = 1 - \frac{\left(\frac{x}{3}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{x}{3}\right)^4}{4!} - \frac{\left(\frac{x}{3}\right)^6}{6!} \dots$$

$$E_{max} = \left| \frac{P_{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{n+1}_{(0)} \right|$$

$f(x) = \cos\left(\frac{x}{3}\right)$ عدد المشتقات 3 لأن $n+1 = 2+1 = 3$ (إذاً نشتق ثلاث مرات) :

$$f'(x) = -\left(\frac{1}{3}\right)\sin\left(\frac{x}{3}\right)$$

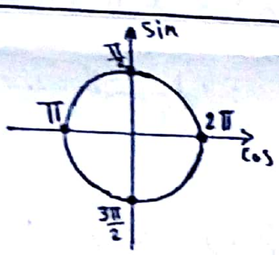
$$f''(x) = -\left(\frac{1}{3}\right)^2\cos\left(\frac{x}{3}\right)$$

$$f'''(x) = +\left(\frac{1}{3}\right)^3\sin\left(\frac{x}{3}\right)$$

حيث نأخذ القيمة العظمى للمشتق الثالث :

$$\left|\max f^{(3)}(0)\right| = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times 1 = 0.037037037037 04$$

ملاحظة :



لماذا قلنا أن القيمة العظمى لـ $\sin\left(\frac{x}{3}\right)$ هي الواحد على المجال $[0, 2\pi]$ ؟؟

نعلم أنه من الدائرة المثلثية وعلى المجال $[0, 2\pi]$ القيمة العظمى لـ sin هي الواحد أي عند $\frac{\pi}{2}$

لذلك القيمة العظمى لـ $\sin\left(\frac{x}{3}\right)$ يجب أن تكون واحد لذلك نجرب التعويض

بدل الـ x الزوايا 2π و $\frac{\pi}{2}$ و π و $\frac{3\pi}{2}$ لمعرفة عند أي زاوية تكون $\sin\frac{x}{3}$ عظمى :

عند $x = 2\pi \Leftarrow$ $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 0.8660254038$

عند $x = \frac{\pi}{2} \Leftarrow$ $\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{3}\right) = 0.5$

عند $x = \pi \Leftarrow$ $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0.8660254038$

عند $x = \frac{3\pi}{2} \Leftarrow$ $\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{2}}{3}\right) = 1$

$\Leftarrow$ وبالتالي القيمة العظمى لـ $\sin\left(\frac{x}{3}\right)$ هي الواحد وذلك عندما تكون : $x = \frac{3\pi}{2}$

تكملة الحل :

$$P_{n+1}(x) = (X - X_0)^{n+1} = \left(\frac{x}{3} - 0\right)^3 = \left(\frac{x}{3}\right)^3$$

$$\Rightarrow \left|\max P_{n+1}(x)\right| = \left.\left(\frac{x}{3}\right)^3\right|_{x=0.01} = \left(\frac{0.01}{3}\right)^3 = 3.7037037037 04 \times 10^{-8}$$

$$(n+1)! = (2+1)! = 3! = 6$$

$$\Rightarrow E_{max} = \left|\frac{P_{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(0)\right| = \left|\frac{3.703703704\times10^{-8}}{6} \times 0.03703703704\right|$$

$$\Rightarrow E_{max} = 2.286236855\times10^{-10}$$

$$E_{exact} = |T-Q|$$

$$T = \cos\left(\frac{x}{3}\right) = \cos\left(\frac{0.01}{3}\right) = 0.9999944444$$

$$Q = 1 - \frac{\left(\frac{x}{3}\right)^2}{2!} = 1 - \frac{\left(\frac{0.01}{3}\right)^2}{2!} = 0.9999944444$$

$$E_{exact} = |T-Q| = |0.9999944444 - 0.9999944444| = 0$$

بما أن $E_{max} > E_{exact}$ فإن الاقتطاع مقبول من أجل $n=2$

* ~ * ~ * ~ * ~ * ~ * ~ * ~ *

حل السؤال الثاني: الطلب الأول:

$$f(x) = e^x + x \Rightarrow f'(x) = e^x + 1$$

1) طريقة الجدول:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\lvert X_n - X_{n-1}\rvert$
0	0	1	2	—
1	-0.5	0.1065306597	1.6065306…	0.5
2	-0.5663110032	1.304509837×10^{-3}	1.567615513	0.0663110032

2) الطريقة الثانية:

$$f(x) = e^x + x \Rightarrow f'(x) = e^x + 1 \Rightarrow f''(x) = e^x$$

$$X_n = X_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

$$X_n = X_{n-1} - \frac{e^x + X}{e^x + 1}$$

$$x_0 = 0$$

$$\Rightarrow X_1 = 0 - \frac{e^0 + 0}{e^0 + 1} = -0.5$$

$$\Rightarrow x_2 = -0.5 - \frac{e^{-0.5} - 0.5}{e^{-0.5}+1} = -0.5663110032$$

حساب الخطأ الأعظمي :

$$E_{max} = |X_n - X_{n-1}|$$

$$E_{max_1} = |X_1 - X_0| = |-0.5 - 0| = +0.5$$

$$E_{max\,2} = |X_2 - X_1| = |-0.5663110032 + 0.5| = 0.663110032$$

الطلب الثاني ، مرتبة التقارب : $P = 2$

ثابت التقارب :

$$C = \frac{f''}{2f'} = \frac{e^x}{2(e^x+1)}$$

$$C = \frac{e^{-0.5663110032}}{2(e^{-0.5663110032}+1)} = 0.181044235$$

حل السؤال الثالث :

$$f(x) = \tan(x) - 2x$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{4} = 0.25$$

$x_i = a + hi$

$x_0 = a$

$x_1 = a + h$

$x_2 = a + 2h$

$x_3 = a + 3h$

$x_4 = a + 4h$

n	x_i	y_i
0	0	0
1	0.25	-0.2446580788
2	0.50	-0.4536975102
3	0.75	-0.5684035401
4	1	-0.4425922753

$$I(f) \simeq \frac{h}{2}\left[y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4\right]$$

$$I(f) \simeq \frac{0.25}{2}\Big[0 + (2)(-0.2446580788) + (2)(-0.4536975102) + (2)(-0.568403540) + (-0.4425922753)\Big] \simeq -0.3720138167$$

حل السؤال الرابع : عدد النقاط 4 ناقص 1 $\leftarrow n = 3$

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-3)(x+1)(x-4)}{(-1)(3)(-2)} = \frac{1}{6}(x-3)(x+1)(x-4)$$

$$L_1(x) \simeq \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-2)(x+1)(x-4)}{(1)(4)(-1)} = -\frac{1}{4}(x-2)(x+1)(x-4)$$

$$L_2(x) \simeq \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(-3)(-4)(-5)} = -\frac{1}{60}(x-2)(x-3)(x-4)$$

$$L_3(x) \simeq \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x-2)(x-3)(x+1)}{(2)(1)(5)} = \frac{1}{10}(x-2)(x-3)(x+1)$$

$$P_n(x) = L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 + \dots + L_n(x)y_n$$

$$P_3(x) = L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 + L_2(x)y_2 + L_3(x)y_3$$

$$P_3(x) = \frac{1}{6}(x-3)(x+1)(x-4) - \frac{1}{4}(x-2)(x+1)(x-4) - \frac{1}{60}(x-2)(x-3)(x-4) + \frac{1}{10}(x-2)(x-3)(x+1)$$

لنحسب $f(0)$:

$$f(0) \simeq P_3(0) = \frac{1}{6}(0-3)(0+1)(0-4) - \frac{1}{4}(0-2)(0+1)(0-4) - \frac{1}{60}(0-2)(0-3)(0-4) + \frac{1}{10}(0-2)(0-3)(0+1)$$

$$f(0) \simeq P_3(0) = -2$$

~ * ~ * ~ * ~ * ~ * ~ * ~ * ~ * ~ * ~

حل السؤال الخامس :

أولاً : نحسب المشتق الأول للدالة f باستخدام الصيغة التقدمية لنقطتين حيث $x_0=0.7$, $h=0.1$

$$f'(x_0) \simeq \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \simeq \frac{f(0.7+0.1)-f(0.7)}{0.1} \simeq \frac{f(0.8)-f(0.7)}{0.1}$$

$$\Longrightarrow f'(x_0) \simeq \frac{2.5396-2.13375}{0.1} \simeq 4.0585$$

ثانياً : نحسب المشتق الأول للدالة f باستخدام الصيغة التراجعية لنقطتين حيث : $x_0=0.7$, $h=0.2$

$$f'(x_0) \simeq \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h} \simeq \frac{f(0.7)-f(0.7-0.2)}{0.2} \simeq \frac{f(0.7)-f(0.5)}{0.2}$$

$$\Rightarrow f'(x_0) \simeq \frac{2.13375-1.64872}{0.2} \simeq 2.42515$$

انتهى حل الأسئلة !!

Rama Johar

Syria math

Scanned by CamScanner

أسئلة الدورة الفصلية الأولى لعام (٢٠١٦ / ٢٠١٧) تحليل عددي (١)

السؤال الأول: (١٥ درجة):

أوجد العدد الشرطي للدالة $f(x) = \frac{x}{e^x}$ من أجل $x = 0.01$ ثم حدد وضع الدالة من أجل هذه القيمة.

السؤال الثاني: (20 درجة):

لتكن لدينا المعادلة $e^{-x} - x = 0$ المطلوب:

1) استخدم طريقة القاطع للحصول على الجذر التقريبي x_3 للمعادلة السابقة حيث: $x_0 = 1$ و $x_1 = 2$.

2) ماهو الخطأ الأعظمي المرتكب في حساب هذا الجذر؟

3) ماهي مرتبة تقارب هذه الطريقة؟

السؤال الثالث: (20 درجة):

استخدم طريقة شبه المنحرف المركبة من أجل $n = 3$ لإيجاد القيمة التقريبية للتكامل:

$$I = \int_1^4 \sqrt{1+x^3}\, dx$$

ثم احسب الخطأ الأعظمي المرتكب (علماً أن القيمة العظمى لدالة المشتق في عبارة الخطأ 1.32583)

السؤال الرابع: (25 درجة):

أوجد كثيرة حدود الاستيفاء باستخدام طريقة هرميت للبيانات التالية:

x_i	1	1.05
$f(x_i)$	0.76589	0.83543
$f'(x_i)$	1.53158	1.24222

احسب بشكل تقريبي $f(1.03)$ ماهو الخطأ الفعلي المرتكب في الحساب إذا علمت أن: $f(x) = 3xe^{3} - e^{2x}$

السؤال الخامس: (25 درجة):

استخدم الصيغة المناسبة لحساب المشتق الأول للدالة f عند النقطتين $x = 0.6$ و $x = 0.9$:

x_i	0.5	0.6	0.7	0.9
$f(x_i)$	1.64872	1.90212	2.13375	2.5396

احسب الخطأ الأعظمي المرتكب عند $x = 0.9$ إذا علمت أن الدالة المستخدمة هي $f(x) = e^{x} - 2x^2 + 3x - 1$

انتهت الأسئلة :)

حل أسئلة الدورة الفصلية الأولى (٢٠١٦ - ٢٠١٧) تحليل عددي (١)

حل السؤال الأول:

$$\text{العدد الشرطي} = \left| \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x \right|$$

ولذلك نوجد $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{e^x - xe^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x(1-x)}{(e^x)^2} = \frac{1-x}{e^x}$$

ومنه:

$$\text{العدد الشرطي} = \left| \frac{\frac{1-x}{e^x}}{\frac{x}{e^x}} \cdot x \right| = \left| \frac{1-x}{\cancel{e^x}} \cdot \frac{\cancel{e^x}}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x} \right| = |1-x|$$

من أجل $x = 0.01$:

$$\text{العدد الشرطي} = |1-x| = |1-0.01| = 0.99 < 1$$

وبالتالي الدالة جيدة عند $x = 0.01$ لأن $\text{العدد الشرطي} = 0.99 < 1$

حل السؤال الثاني:

الطلب الأول:

i	x_i	$f(x_i)$	$E_{max} = \lvert X_i - X_{i-1} \rvert$
0	1	-0.6321205588	
1	2	-1.864664717	
2	0.4871416536	0.127238344	1.512858346
3	0.5837796851	-0.02599356368	0.0966380315

الطلب الثاني:

$$E_n = |X_n - X_{n-1}|$$

$$E_3 = |X_3 - X_2| = |0.5837796851 - 0.4871416536| = 0.0966380315$$

الطلب الثالث: مرتبة تقارب هذه الطريقة : $P = 1.62$

حل السؤال الثالث:

$$f(x) = \sqrt{1+x^3}$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$$x_i = a + hi$$

$$\Rightarrow x_0 = a,\ x_1 = a+h,\ x_2 = a+2h,\ x_3 = a+3h$$

n	0	1	2	3
x_i	1	2	3	4
y_i	1.414213562	3	5.291502622	8.062257748

$$I(f) \simeq \frac{h}{2}\left[y_0 + 2y_1 + 2y_2 + y_3\right]$$

$$\simeq \frac{1}{2}\left[1.414213562 + (2)(3) + (2)(5.291502622) + 8.062257748\right] \simeq 13.02973828$$

ايجاد الخطأ الأعظمي :

نحن نعلم أن $f''(\xi) = 1.32583$ من نص السؤال ومنه :

$$E_I = \left| \frac{h^2(b-a)}{12} \cdot f''(\xi) \right|$$

$$\Rightarrow E_I = \left| \frac{(1)^2(4-1)}{12} \times 1.32583 \right| = 0.33146$$

حل السؤال الرابع :

i	x_i	$f(x_i)$			
0	1	0.76589			
			1.53158		
0	1	0.76589		$\frac{1.3908 - 1.53158}{1.05 - 1} = -2.8156$	
			$\frac{0.83543 - 0.76589}{1.05 - 1} = 1.3908$		$\frac{-2.9716 + 2.8156}{1.05 - 1} = -3.12$
1	1.05	0.83543		$\frac{1.24222 - 1.3908}{1.05 - 1} = -2.9716$	
			1.24222		
1	1.05	0.83543			

$a_0 = 0.76589$, $a_1 = 1.53158$, $a_2 = -2.8156$, $a_3 = -3.12$

$n = 1 \Rightarrow 2n+1 = 3$

$$H_{2n+1} = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^2(x-x_1) + a_4(x-x_0)^2(x-x_1)^2 + \dots + a_{2n+1}(x-x_0)^2(x-x_1)^2(x-x_2)^2\dots(x-x_{2n-1})$$

$$H_3(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^2(x-x_1)$$

$$H_3(x) = 0.76589 + (1.53158)(x-1) - (2.8156)(x-1)^2 - (3.12)(x-1)^2(x-1.05)$$

لنحسب قيمة الدالة عند $x = 1.03$ حيث :

$$f(1.03) \simeq H_3(1.03) = (0.76589) + (1.53158)(1.03-1) + (-2.8156)(1.03-1)^2 + (-3.12)(1.03-1)^2(1.03-1.05) = 0.80935952 = Q$$

حساب الخطأ الفعلي :

$$E_{exact} = |T - Q|$$

$$f(1.03) = 3(1.03)e^3 - e^{2(1.03)} = 54.21833928 = T$$

معنا Q لنحسب T

ومنه :

$$E_{exact} = |T - Q| = |54.21833928 - 0.80935952| = 53.40897976$$

حل السؤال الخامس :

x_i	0.5	0.6	0.7	0.9
$f(x_i)$	1.64872	1.90212	2.13375	2.5396

($h=0.1$ ، $h=0.1$ ، $h=0.2$)

نحسب المشتق الأول للدالة f عند النقطة $x = 0.6$ بالصيغة المركزية لثلاث نقاط :

$x_0 = 0.6$ ، $h = 0.1$ فيكون :

$$f'(x_0) \simeq \frac{1}{2h}\left[-f(x_0-h) + f(x_0+h)\right]$$

$$f'(x_0) \simeq \frac{1}{2(0.1)}\left[-f(0.6-0.1) + f(0.6+0.1)\right]$$

$$f'(x_0) \simeq \frac{1}{0.2}\left[-f(0.5) + f(0.7)\right]$$

$$f'(x_0) \simeq 5\left[-1.64872 + 2.13375\right]$$

$$f'(x_0) \simeq 2.42515$$

ولنحسب المشتق الأول لدالة f عند النقطة $x=0.9$ باستخدام الصيغة التراجعية لثلاث نقاط حيث : $h=0.2$ ، $x_0=0.9$ فيكون النقاط المدروسة هي $(0.9 \, , \, 0.7 \, , \, 0.5)$ وذلك بإهمال النقطة 0.6 فيصبح المشتق :

$$f'(x_0) \simeq \frac{1}{2h}\left[f(x_0-2h) - 4f(x_0-h) + 3f(x_0)\right]$$

$$f'(0.9) \simeq \frac{1}{0.4}\left[f(0.9-0.4) - 4f(0.9-0.2) + 3f(0.9)\right]$$

$$\simeq \frac{1}{0.4}\left[f(0.5) - 4f(0.7) + 3f(0.9)\right]$$

$$\simeq \frac{1}{0.4}\left[1.64872 - (4)(2.13375) + (3)(2.5396)\right] \simeq 1.8313$$

لحساب الخطأ الأعظمي عند $x = 0.9$

$$E = \left|\frac{h^2}{3} \cdot f^{3}(\theta_x)\right|$$

$$f(x) = e^x - 2x^2 + 3x - 1$$

$$f'(x) = e^x - 4x + 3 \Rightarrow f''(x) = e^x - 4 \Rightarrow f'''(x) = e^x$$

$$\Rightarrow \left|f^{(3)}(\theta_x)\right| = e^{0.9} = 2.459603111$$

$$E = \left|\frac{(0.2)^2}{3} \times (2.459603111)\right| = 0.0327947081 5$$

انتهى حل الأسئلة

Rama Johar

Syria math

Scanned by CamScanner

أسئلة الدورة الفصلية الثانية (٢٠١٦-٢٠١٧): تحليل عددي (١)

السؤال الأول: (20 درجة):

لتكن لدينا الدالة $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ احسب خطأ الاقتطاع المرتكب على المجال $[0, \pi]$ من أجل $x = 0.01$ ، $n = 2$ ثم أوجد الخطأ الفعلي المرتكب عند النقطة x المذكورة.

علماً أن: $\left(\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots\right)$.

السؤال الثاني: (20 درجة): لتكن لدينا المعادلة $e^x + x = 0$ ، المطلوب:

1) حدد المجال الذي يحوي جذر للمعادلة السابقة من بين المجالين $[-1 , -1.5]$ و $[-0.75 , -0.5]$ ثم استخدم طريقة تنصيف المجال للحصول على جذرين تقريبيين للمعادلة السابقة على ذلك المجال ، واحسب الخطأ المرتكب في حساب كل جذر؟

2) ما هو عدد التكرارات الأعظمي اللازم للحصول على الدقة $\varepsilon = 10^{-10}$ ؟

السؤال الثالث: (20 درجة): استخدم طريقة سمبسون المركبة من أجل $n=4$ لإيجاد قيمة تقريبية للتكامل: $I = \int_0^1 (\tan(x) - 2x)\, dx$

السؤال الرابع: (20 درجة): أوجد كثيرة حدود الاستيفاء باستخدام طريقة نيوتن للبيانات الآتية:

x_i	0	1	2	3
$f(x_i)$	0	1	8	27

ثم احسب $f(1.5)$.

السؤال الخامس: (20 درجة): استخدم أفضل الصيغ لحساب المشتق الأول والمشتق الثاني للدالة f عند النقطة $x = 0.7$ مستفيداً من البيانات الآتية:

x_i	0.5	0.7	0.9
$f(x_i)$	1.64872	2.13375	2.5396

انتهت الأسئلة

حل أسئلة الدورة الفصلية الثانية (٢٠١٦-٢٠١٧) : تحليل عددي (1)

حل السؤال الأول: نعلم أن: ... $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{4!}$

$$E_{max} = \left| \frac{P_{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{n+1}(0) \right|$$

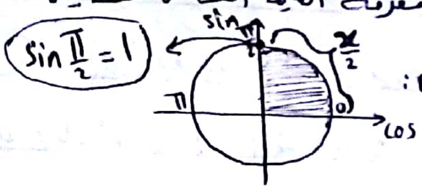
* عدد المشتقات 3 لأن $n+1 = 2+1 = 3$ (إذاً نشتق ثلاث مرات):

$$f(x) = \cos\frac{x}{2}$$
$$f'(x) = -\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$$
$$f''(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^2\cos\frac{x}{2}$$
$$f'''(x) = +\left(\frac{1}{2}\right)^3\sin\frac{x}{2}$$

نأخذ القيمة العظمى للمشتق الثالث: $\left|\max f^{3}(0)\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 1 = 1.25\times10^{-1}$

ملاحظة: لماذا قلنا قيمة $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ العظمى هي 1 ؟؟ * نحن نعلم أن القيمة العظمى للساين في الدائرة المثلثية هي الواحد أي عند الزاوية $\frac{\pi}{2}$.

* في هذا التمرين لدينا المجال $[0,\pi]$ والزاوية المطلوب معرفة القيمة العظمى لساينها هي الزاوية $\frac{x}{2}$ أي أنها تمر من منتصف المجال أي تمر من النقطة $\frac{\pi}{2}$ بالشكل:



بالتالي قلنا أن القيمة العظمى لـ $\sin\frac{x}{2}$ هي الواحد لأنها تقطع القيمة العظمى $\sin\frac{\pi}{2} = 1$

نكمل الحل:

$$P_{n+1}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^3 \Rightarrow$$

$$\left|\max P_{n+1}(x)\right| = \left(\frac{x}{2}\right)^3\Big|_{x=0.01} = \left(\frac{0.01}{2}\right)^3 = 1.25\times10^{-7}$$

$$(n+1)! = 3! = 6$$

$$\Rightarrow E_{max} = \left|\frac{P_{n+1}}{(n+1)!}\cdot f^{n+1}(0)\right| = \left|\frac{1.25\times10^{-7}}{6}\times 1.25\times10^{-1}\right| = 2.604166667\times10^{-9}$$

$$E_{exact} = |T-Q|$$

$$T=\cos\left(\frac{x}{2}\right)=\cos\left(\frac{0.01}{2}\right)=0.9999875$$

$$Q=1-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2!}=1-\frac{\left(\frac{0.01}{2}\right)^2}{2!}=0.9999875$$

$$E_{exact}=|T-Q|=|0.9999875-0.9999875|=0$$

$E_{max}>E_{exact}$ فإن الاقتطاع مقبول من أجل $n=2$

حل السؤال الثاني :

الطلب الأول : لدينا الدالة $f(x)=e^{x}+x$ نقول عن المجال $[a,b]$ أنه يحوي جذراً للدالة $f(x)$ (عدد فردي من الجذور) يجب أن يتحقق الشرط : $f(a).f(b)<0$

في المجال $[-1.5,-1]$:

$$f(a)=f(-1.5)=-1.27686984$$
$$f(b)=f(-1)=-0.6321205588$$
$$f(-1.5).f(-1)>0$$

وبالتالي لم يتحقق الشرط (أي أن هذا المجال يحوي عدد زوجي من الجذور أو ليس يحوي جذور لذلك لا نستطيع الحكم عليه).

في المجال $[-0.75,-0.5]$:

$$f(a)=f(-0.75)=-0.2776334473$$
$$f(b)=f(-0.5)=0.1065306597$$
$$f(-0.75).f(-0.5)<0$$

وبالتالي بما أن الشرط تحقق فالدالة تحوي عدد فردي من الجذور ضمن هذا المجال.

المطلوب إيجاد جذرين تقريبيين على هذا المجال $[-0.75,-0.5]$:

n	a	b	$c=\frac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(c)$	$E_{max}=\frac{b-a}{2}$
1	-0.75	-0.5	-0.625	-0.277633	0.106531	-0.089739	0.125
2	-0.625	-0.5	-0.5625	-0.089739	0.106531	0.007283	0.0625

طريقة ثانية لحساب E_{max} في كل من الجذرين :

عندما $n=1$: $E_{max} \leqslant \frac{b-a}{2^n}$ القيمة الابتدائية ومنه :

$$E_{max} \leqslant \frac{-0.5+0.75}{2^1} = 0.125$$

عندما $n=2$: $E_{max} \leqslant \frac{b-a}{2^n}$ القيمة الابتدائية ومنه :

$$E_{max} \leqslant \frac{-0.5+0.75}{2^2} = 0.0625$$

الطلب الثاني : عدد التكرارات الأعظمي اللازم للحصول على الدقة $\varepsilon = 10^{-10}$:

$$\frac{\log\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\log 2} < n$$

$$\frac{\log(2500000000)}{0.3010299957} = \frac{9.397940009}{0.3010299957} = 31.21928095 < n$$

n هي أول عدد صحيح يلي 31 (الموجود على يسار الفاصلة)

ومنه : $\left\{\begin{array}{l} 31.21928095 < n \\ 31.21928095 < 32 \end{array}\right. \Leftarrow$ ومنه $\boxed{n=32}$

حل السؤال الثالث :

$$f(x) = \tan(x) - 2x$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{4} = 0.25$$

n	x_i	y_i
0	0	0
1	0.25	-0.2446580788
2	0.50	-0.4536975102
3	0.75	-0.5684035401
4	1	-0.4425922753

ملاحظة : $x_i = a + hi$

$x_0 = a = 0$

$x_1 = a + h = 0 + 0.25 = 0.25$

$x_2 = a + 2h = 0 + (2)(0.25) = 0.50$

$x_3 = a + 3h = 0 + (3)(0.25) = 0.75$

$x_4 = a + 4h = 0 + (4)(0.25) = 1$

$$I(f) \approx \frac{h}{3}\left[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4\right]$$

$$I(f) \approx \frac{0.25}{3}\left[0 + (4)(-0.2446580788) + (2)(-0.4536975102) + (4)(-0.5684035401) + (-0.4425922753)\right] \approx -0.3835194809$$

حل السؤال الرابع :

i	x_i	$f(x_i)$			
0	0	0			
			$\frac{1-0}{1-0} = 1$		
1	1	1		$\frac{7-1}{2-0} = 3$	
			$\frac{8-1}{2-1} = 7$		$\frac{6-3}{3-0} = 1$
2	2	8		$\frac{19-7}{3-1} = 6$	
			$\frac{27-8}{3-2} = 19$		
3	3	27			

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + \dots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$$

$$P_3(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

نعوض :

$$P_3(x) = 0 + (1)(x-0) + (3)(x-0)(x-1) + (1)(x-0)(x-1)(x-2)$$

$$P_3(x) = x + 3(x)(x-1) + x(x-1)(x-2)$$

$$f(1,5) \approx P_3(1.5) = (1.5) + 3(1.5)(1.5-1) + (1.5)(1.5-1)(1.5-2) = 3.375$$

حل السؤال الخامس :

لحساب المشتق الأول للدالة f نستخدم الصيغة المركزية لثلاث نقاط حيث :

$x_0 = 0.7$, $h = 0.2$

$$f'(x_0) \simeq \frac{1}{2h}\left[-f(x_0-h)+f(x_0+h)\right] \simeq \frac{1}{2(0.2)}\left[-f(0.7-0.2)+f(0.7+0.2)\right]$$

$$f'(x_0) \simeq \frac{1}{0.4}\left[-f(0.5)+f(0.9)\right]$$

$$f'(x_0) \simeq 2.5\left[-1.64872+2.5396\right] \simeq 2.2272$$

لحساب المشتق الثاني للدالة f عند $x_0 = 0.7$ نستخدم قانون المشتق من مراتب عليا : حيث $h=0.2$

$$f''(x_0) \simeq \frac{1}{h^2}\left[f(x_0-h)-2f(x_0)+f(x_0+h)\right]$$

$$\simeq \frac{1}{(0.2)^2}\left[f(0.7-0.2)-2f(0.7)+f(0.7+0.2)\right]$$

$$\simeq 25\left[f(0.5)-2f(0.7)+f(0.9)\right]$$

$$\simeq 25\left[1.64872-(2)(2.13375)+2.5396\right]$$

$$\Rightarrow f''(x_0) \simeq -1.9795$$

انتهى حل الأسئلة !!

Rama Johar

Syria math