الفصل الأول ٢٠١٦

أجب عن جميع الأسئلة التالية

السؤال الأول : (١) ٢٥ درجة ، (٢) ٢٠ درجة ، (٣) ١٥ درجة

1) اذكر نص تمهيدية فريس ، ثم أثبت صحتها .

2) أثبت أن الفضاء l^p ، حيث $(1 \le p \le \infty)$ ، فصول .

3) اذكر تعريف قاعدة شاودر ، ثم ادرس صحة المقولة الرياضية التالية : اذا وجد لفضاء منظم X قاعدة شاودر ، فإن X فصول .

السؤال الثاني : (A) ١٥ درجة ، (B) ١٥ درجة ، (C) ١٠ درجة

A) بين أن المساواة $d(x,y) = |x-y|^{\frac{1}{n}}$ تحدد متركاً (دالة مسافة) على مجموعة الأعداد الحقيقية

B) احسب نظيم العنصر $x = \left(\frac{1}{n^2-10n+28}\right)$ ، $(n \in N)$ في الفضاء l^∞ .

C) ادرس تقارب المتتالية التي حدها العام : $x_n =$

$$\left(\underbrace{\frac{1}{n}, \ldots\ldots\ldots, \frac{1}{n}}_{(n)\ \text{مرة}}, 0,0,0 \ldots\ldots\right)$$

في الفضاء l^1

انتهت الأسئلة

حل دورة الفصل الأول 2016

السؤال الأول:

1) لم يرد في المنهاج

2) إثبات أن الفضاء ℓ^p فصول حيث $(1\le p<+\infty)$: لتكن لدينا $M\in \ell^p$ المجموعة الجزئية من ℓ^p) التي عناصرها هي متتاليات تتصف بما يلي:

$$y=(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\dots,\eta_n,0,0,\dots)\in M$$

وحيث n عدد طبيعي موجب والأعداد (η_i) عادية، من الواضح أن M عدودة، بقي علينا إثبات أنها كثيفة في ℓ^p، ليكن لدينا $x=(\xi_i)\in \ell^p$ نريد إيجاد عنصر من M بحيث يبعد عن x بعداً أصغر من ε (ε عدد صغير كيفي موجب) وهو مفهوم الكثافة بأسلوب حلمي البرهان أن $\bar{M}=\ell^p$، نبرهن أنه:

$$\forall \varepsilon>0;\forall x\in \ell^p;\exists y\in M: d(x,y)<\varepsilon$$

طالما أن $x\in \ell^p$ فإن المتسلسلة $\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p<+\infty$ أي أن المتسلسلة متقاربة ومنه فإن باقي يسعى إلى الصفر أي:

$$\forall \varepsilon>0 \quad \sum_{i=n+1}^{\infty}|\xi_i|^p<\frac{\varepsilon^p}{2}\Leftrightarrow R_n=\sum_{i=n+1}^{\infty}|\xi_i|^p\longrightarrow 0$$

ولما كانت مجموعة الأعداد العادية كثيفة في $\mathbb{R}$ فإنه يوجد لكل ξ_i عدد عادي η_i قريب منه لذا فإنه يمكننا ضمان وجود عنصر $y=(\eta_i)$ من M يحقق الشرط:

$$\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\eta_i|^p<\frac{\varepsilon^p}{2}\ ;\ \varepsilon>0$$

$$\Rightarrow [d(x,y)]^p=\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\eta_i|^p+\sum_{i=n+1}^{\infty}|\xi_i|^p<\frac{\varepsilon^p}{2}+\frac{\varepsilon^p}{2}=\varepsilon^p$$

ومنه فإن $d(x,y)<\varepsilon$ وبالتالي فإن M كثيفة في ℓ^p

أصبح لدينا M كثيفة وعدودة $\Leftarrow$ ℓ^p فضاء فصول

تم الحل بعونه

3) قاعدة شاودر: إذا حوى فضاء منظم X متتالية (e_n) بحيث أنه يوجد لكل عنصر $x \in X$ متتالية وحيدة من الأعداد (α_n) « تنتمي للحقل المعرف عليه الفضاء المتجهي »

تحقق معها الشرط: $\| x-(\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n) \| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

فإننا نقول عن (e_n) إنها قاعدة شاودر ونحقق أن: $x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$

وندعو هذه المتسلسلة والتي مجموعها x بمنشور x بالنسبة للقاعدة (e_n)

• إذا وجد لفضاء منظم X قاعدة شاودر فإن X فصول.

يكفي لإثبات أن الفضاء X فصول أن نوجد مجموعة عدودة وكثيفة في هذا الفضاء لذلك لنأخذ المجموعة $H = \{ \sum_{k=1}^{n} q_k e_k = q_1 e_1 + q_2 e_2 + \cdots + q_n e_n ; q_k \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}^* \}$

وهي مجموعة عدودة ولنبين أن هذه المجموعة كثيفة في الفضاء X مستفيدين من خاصية كون الفضاء X يمتلك قاعدة شاودر، وللبرهان على الكثافة نبرهن على أن كل جوار لأي نقطة من X يحوي نقاطاً من H، أي نبرهن على أنه لأجل أي نقطة x من X يوجد عنصر من المجموعة H قريب منه، حسب الفرض وكون الفضاء X يمتلك قاعدة شاودر (e_n) وبالتالي يوجد لأجل أي كل عنصر x من X متتالية وحيدة (a_n) من عناصر الحقل المعرف عليه الفضاء X بحيث تحقق:

$$\| x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \| = \| x-(a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n) \| \longrightarrow 0 \ , \ n \to \infty$$

وهذا يعني بالاعتماد على مفهوم التقارب وباختيار $\varepsilon = \frac{r}{2}$ أن:

$$\forall \varepsilon = \frac{r}{2} > 0 \ ; \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} ; n \geq N_\varepsilon : \big| \, \| x-(a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n) \| - 0 \big| < \varepsilon = \frac{r}{2}$$

$$\Rightarrow \| x-(a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n) \| < \frac{r}{2} \quad \cdots (1)$$

بما أن $\mathbb{Q}$ كثيفة في $\mathbb{R}$ فإنه يمكن إيجاد $(q_k) ; k=1,\ldots,n$ بحيث يتحقق:

$$|a_k - q_k| < \frac{r}{2n \cdot \max(\|e_1\|, \ldots, \|e_n\|)}$$

عندئذٍ ليكن $q_1 e_1 + \cdots + q_n e_n \in H$ عندها يمكن أن نكتب ما يلي:

$$\| (a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n) - (q_1 e_1 + \cdots + q_n e_n) \| = \| (a_1 - q_1) e_1 + \cdots + (a_n - q_n) e_n \|$$
$$\leq |a_1 - q_1| \|e_1\| + \cdots + |a_n - q_n| \|e_n\|$$

$$\Rightarrow \| (a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n) - (q_1 e_1 + \cdots + q_n e_n) \| <$$
$$\frac{r}{2n \cdot \max(\|e_1\|, \ldots, \|e_n\|)} \|e_1\| + \cdots + \frac{r}{2n \cdot \max(\|e_1\| + \cdots + \|e_n\|)} \|e_n\|$$

إذا ضمنا النظيم مع المقدار $\max(\|e_1\|, \dots, \|e_n\|)$ من المقام في كل حد من الحدود السابقة سيجعل الكسر أكبر وبالتالي لن تتغير في اتجاه المتراجحة كما يلي :

$$\|(a_1e_1 + \dots + a_ne_n) - (q_1e_1 + \dots + q_ne_n)\| < \underbrace{\frac{r}{2n} + \dots + \frac{r}{2n}}_{n \text{ مرة}}$$

$$= n \cdot \frac{r}{2n} = \frac{r}{2}$$

$$\Rightarrow \|(a_1e_1 + \dots + a_ne_n) - (q_1e_1 + \dots + q_ne_n)\| < \frac{r}{2} \quad \dots (2)$$

أصبح لدينا ما يلي :

$$\|(q_1e_1 + \dots + q_ne_n) - x\| = \|(q_1e_1 + \dots + q_ne_n) - \underbrace{(a_1e_1 + \dots + a_ne_n) + (a_1e_1 + \dots + a_ne_n)}_{\text{أضفنا وطرحنا}} - x\|$$

وحسب تعريف النظيم

$$\leq \|(q_1e_1 + \dots + q_ne_n) - (a_1e_1 + \dots + a_ne_n)\| + \|(a_1e_1 + \dots + a_ne_n) - x\|$$

وبالاستفادة من العلاقتين (1) و (2) نجد أن

$$\|(q_1e_1 + \dots + q_ne_n) - x\| < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$$

حيث $r > 0$ وكون x عنصر كيفي من X يكون قد تم إثبات أن المجموعة H كثيفة في الفضاء X إذن X فصول ومنه فإن امتلاك X قاعدة شاودر يجعل X فضاءً فصولاً

السؤال الثاني :

(A) متى تكون المساواة $d(x,y) = |x-y|^{\frac{1}{n}}$ تابع مسافة يجب أن تحقق الشروط الأربعة $(\forall x,y \in \mathbb{R})$:

$\boxed{1}$ $d(x,y) = |x-y|^{\frac{1}{n}} \geq 0$ (لأن $|x-y| \geq 0 \Rightarrow \forall n \in N; |x-y|^{\frac{1}{n}} \geq 0$)

$\boxed{2}$ $d(x,y) = |x-y|^{\frac{1}{n}} \underbrace{=}_{\text{حسب خواص القيم المطلقة}} |y-x|^{\frac{1}{n}} = d(y,x)$

$\boxed{3}$ $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow |x-y|^{\frac{1}{n}} = 0 \Leftrightarrow |x-y| = 0 \Leftrightarrow x-y = 0 \Leftrightarrow x = y$

$\boxed{4}$ $\forall x,y,z \in \mathbb{R}; |x-y|^{\frac{1}{n}} \leq |x-z|^{\frac{1}{n}} + |z-y|^{\frac{1}{n}}$ لنتحقق من متراجحة المثلث

بالاستفادة من منشور الكرخي نيوتن الذي يعطى بالمساواة :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k} = b^n + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}_{\text{مقدار موجب نقوم بحذفه}} + a^n \Rightarrow$$

Scanned by CamScanner

$$(a+b)^n \geq a^n + b^n \quad \text{--- } ⊛$$

لنفرض أن: $a = |x-z|^{\frac{1}{n}}$ و $b = |z-y|^{\frac{1}{n}}$

نعوض في ⊛ :

$$\left(|x-z|^{\frac{1}{n}} + |z-y|^{\frac{1}{n}}\right)^n \geq \left(|x-z|^{\frac{1}{n}}\right)^n + \left(|z-y|^{\frac{1}{n}}\right)^n$$

$$= |x-z| + |z-y|$$

ونعلم أن:

$$|x-y| \leq |x-z| + |z-y|$$

وبالتالي فإن:

$$|x-y| \leq |x-z| + |z-y| \leq \left(|x-z|^{\frac{1}{n}} + |z-y|^{\frac{1}{n}}\right)^n \underset{\text{نجذر النوني للطرفين}}{\Longrightarrow}$$

$$|x-y|^{\frac{1}{n}} \leq |x-z|^{\frac{1}{n}} + |z-y|^{\frac{1}{n}} \Rightarrow d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

تحقق متراجحة المثلث ، مما سبق نلاحظ تحقق الشروط الأربعة وبالتالي فإن المساواة $d(x,y) = |x-y|^{\frac{1}{n}}$ تحدد متريكاً على $\mathbb{R}$

Ⓑ احسب نظيم العنصر $x = \left(\frac{1}{n^2-10n+28}\right)$ ، $(n \in \mathbb{N})$ في الفضاء ℓ^∞

نعلم أنه إذا $x \in \ell^\infty \Leftarrow$

$$\|x\| = \sup_{i \geq 1} |x_i|$$

$$\|x\| = \sup_{i \geq 1} \left|\frac{1}{(n^2-10n+28)}\right| = \sup_{i \geq 1} \left|\frac{1}{n^2-10n+25+3}\right|$$

$$\|x\| = \sup_{i \geq 1} \left|\frac{1}{(n-5)^2+3}\right| = \frac{1}{3}$$

((يبلغ الكسر أعظم قيمة له عندما يكون المقام أصغر ما يمكن وذلك عندما $n=5$))

Ⓒ دراسة تقارب المتتالية التي حدها العام $x_n = (\underbrace{\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}, \ldots, \tfrac{1}{n}}_{n \text{ مرة}}, 0, 0, \ldots)$ في الفضاء ℓ^1

إن الفضاء ℓ^1 هو فضاء تام (ℓ^p فيه $p=1$) وبما أنه تام فإن كل متتالية كوشية فيه ستكون متقاربة وللحكم على المتتالية المعطاة أنها متقاربة أو متباعدة نبحث فيما إذا كانت هذه المتتالية كوشية أم لا فإذا كانت كوشية تكون متقاربة وإذا لم تكن كوشية ستكون متباعدة

نتحقق من شرط كوشي التالي: $\forall \varepsilon > 0 ; \exists n_0 \in \mathbb{N} ; n, m \geq n_0 ; d(x_n, x_m) < \varepsilon$

لدينا $x_n = (\underbrace{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots \frac{1}{n}}_{n \text{ مرة}}, 0, 0, \ldots)$ ، $x_m = (\underbrace{\frac{1}{m}, \frac{1}{m}, \ldots, \frac{1}{m}}_{(m) \text{ مرة}}, 0, 0, \ldots)$

وإن المترك المعرف على الفضاء ℓ^1 هو: $d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \eta_i|$

حيث $x = (\xi_i)$ ، $y = (\eta_i)$

لنأخذ $\varepsilon > 0$ فإذا كان $n > m$ نجد التالي:

$$d(x_n, x_m) = \underbrace{\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| + \ldots + \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right|}_{m \text{ مرة}} + \underbrace{\left|\frac{1}{n}\right| + \ldots + \left|\frac{1}{n}\right|}_{(n-m) \text{ مرة}} + 0 + 0 + \ldots$$

$$\Rightarrow d(x_n, x_m) = m\left(\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right|\right) + (n-m)\left(\left|\frac{1}{n}\right|\right)$$

بما أنه لدينا فرضاً $n > m \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{m}$ وبالتالي:

$$d(x_n, x_m) = m\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right) + (n-m)\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{m}{n} + 1 - \frac{m}{n} = 2 - 2\frac{m}{n}$$

$$\Rightarrow d(x_n, x_m) = 2\left(1 - \frac{m}{n}\right) = 2\left(\frac{n-m}{n}\right) = \frac{2(n-m)}{n}$$

وحسب خاصية أرخميدس لأجل العددين: $x = \varepsilon > 0$ موجب ، $y = 2(n-m)$

فإنه يوجد عدد طبيعي (n) بحيث يتحقق: $n \cdot \varepsilon > 2(n-m)$

$$\Rightarrow \varepsilon > \frac{2(n-m)}{n} \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

وبالتالي فإن المتتالية $\{x_n\}$ كوشية في الفضاء التام ℓ^1 وبالتالي هي متقاربة

تم حل الدورة 2016 م

جامعة دمشق　　　امتحان التابعي (١)　　　المدة ساعتان

كلية العلوم　　　السنة الثالثة رياضيات　　　الدورة الاضافية ٢٠١٦-٢٠١٧

أجب عن الأسئلة التالية

السؤال الأول :أجب عما يلي :　　　(١٥+٢٠+٢٥= ٦٠ درجة)

1) عرف المفاهيم الرياضية التالية :
دالة المسافة على مجموعة X - المجموعة المفتوحة في فضاء متري –فضاء المتتاليات l^∞ - الفضاءات الإيزومتريات – الفضاء الفصول .

2) الشرط اللازم والكافي كي يكون التطبيق $T: X \to Y$ من فضاء متري (X, d) في فضاء متري $(\cancel{X}, \tilde{d})$ مستمراً في نقطة x_0 هو أن يقتضي الشرط $x_n \to x_0$ الشرط: $Tx_n \to Tx_0$.

3) أثبت أن الفضاء الدالي $C[a, b]$ الموزود بالدالة المسافة :

$$d(x, y) = \underbrace{\max}_{t \in j} |x(t) - y(t)|$$

$(x, y \in C[a, b])$ هو فضاء تام .

السؤال الثاني : أجب عما يلي:　　　(٢٠+٢٠=٤٠ درجة)

1) أثبت أن الكرة الواحدية المغلقة في فضاء X تكون مجموعة محدبة .

2) أثبت أن اللصاقة $\bar{Y}$ للفضاء الجزئي Y من فضاء منظم X . هي أيضاً فضاء متجهي جزئي .

انتهت الاسئلة

الدورة الإضافية 2016 - 2017

السؤال الأول:

① دالة المسافة على مجموعة X: لتكن لدينا X مجموعة ما غير خالية ولتكن d دالة معرفة بالشكل التالي:

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto d(x, y)$$

وتحقق هذه الدالة الشروط التالية، بفرض $x, y, z \in X$ فإن:

1] $d(x,y) \geq 0$

2] $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

3] $d(x,y) = d(y,x)$ (خاصية التناظر)

4] $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (متباينة المثلث)

وبالتالي نسمي هذه الدالة دالة المسافة على المجموعة X (متري)

• المجموعة المفتوحة في فضاء متري: نقول عن مجموعة M من فضاء متري (X,d) أنها مجموعة مفتوحة إذا كانت جميع نقاطها داخلية أي

$$\forall x_0 \in M ; \exists \underbrace{N(x_0, r)}_{\text{كرة مفتوحة مركزها النقطة ونصف قطرها مناسب}} ; N(x_0, r) \subseteq M$$

(أي أنه أي نقطة من M عبارة عن مركز الكرة مفتوحة مركزها النقطة ونصف قطرها مناسب)

• فضاء المتتاليات l^∞: هي مجموعة كل المتتاليات المحدودة من الأعداد العقدية أي أن كل عنصر من l^∞ هو عبارة عن متتالية عقدية:

$$\forall x \in l^\infty \Rightarrow x = (\xi_i)_{i\geq 1} ; x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)$$

(وتحقق أنه يوجد عنصر لكل $x \in l^\infty$ يحد جميع مكونات هذا العنصر) $\exists C_x > 0 ; |\xi_i| \leq C_x$

ودالة المسافة المعرفة على هذا الفضاء: $x = (\xi_i)_i , y = (\eta_i)_i$; $d(x,y) = \sup_{i\geq 1} |\xi_i - \eta_i|$

• الفضاءات الإيزومترية: نقول عن X, Y أنهما إيزومتريان فيما بينهما إذا وجد تطبيق T إيزومتري (غامر ومتباين) لذا فإن الفضاءين الإيزومتريان قد يختلفان على الأكثر بطبيعة عناصرهما ولكنه لا يمكن التمييز بينهما من وجهة نظر المتري، وبالتالي يمكن اعتبار الفضاءين الإيزومتريين متطابقين في أي دراسة لا تدخل في اعتبار طبيعة عناصرهما

• الفضاء الفصول: نقول عن الفضاء X إنه فصول إذا احتوى على مجموعة عدودة وكثيفة

② T مستمراً عند x_0 $\Leftrightarrow$ (if $x_n \to x_0 \Rightarrow Tx_n \to Tx_0$)

البرهان: $(\Rightarrow)$ لنفرض أن T مستمراً عند النقطة $x_0 \in X$ وعلينا إثبات أنه إذا كان $x_n \to x$ فإن $Tx_n \to Tx_0$ ، لدينا كون T مستمراً عند x_0 فإنه:

① $\forall \varepsilon > 0 ; \exists \delta > 0 ; d(x, x_0) < \delta \Rightarrow \tilde{d}(Tx, Tx_0) < \varepsilon \; ; \forall x \in X$

ولنفرض وجود متتالية اختيارية $x_n \in X$ تسعى إلى x_0 إن هذا التقارب يتم في X عندئذٍ حسب تعريف تقارب متتالية يكون لدينا

$\forall \varepsilon > 0 ; \exists n_0 \in \mathbb{N} ; n \geq n_0 ; d(x_n, x_0) < \varepsilon$ ②

في العلاقة ② لو استبدلنا ε بـ δ بحيث $\delta > 0$ يصبح لدينا

$\forall \varepsilon > 0 ; \exists \delta > 0 ; d(x_n, x_0) < \delta \Rightarrow \tilde{d}(Tx_n, Tx_0) < \varepsilon$

(أي تحقق لدينا أن المسافة بين عناصر المتتالية x_n أصغر من δ وبالتالي يكون لدينا المسافات بين صور هذه العناصر أصغر من ε) وبالتالي نستطيع أن نكتب:

$\forall \varepsilon > 0 ; \exists n_1 \in \mathbb{N} ; n \geq n_1 ; \tilde{d}(Tx_n, Tx_0) < \varepsilon$

وهذا تعريفاً هو $Tx_n \to Tx_0$ ومنه يتم المطلوب

$(\Leftarrow)$ لنفرض أن الشرط التالي محقق $x_n \to x_0 \Rightarrow Tx_n \to Tx_0$ ولنثبت أن T مستمراً ، لنفرض جدلاً أن T غير مستمر ومنه يكون لدينا

يوجد عدد موجب $\varepsilon > 0$ بحيث يقابل كل $\delta > 0$ عنصر x_n مقابل لـ x_0 بحيث تحقق $d(x_n, x_0) < \delta$ ويكون في الوقت نفسه $\tilde{d}(Tx_n, Tx_0) \geq \varepsilon$

$\exists \varepsilon > 0 , \forall \delta > 0 ; \exists d(x_n, x_0) < \delta \Rightarrow \tilde{d}(Tx_n, Tx_0) \geq \varepsilon$

باختيار $\delta = \frac{1}{n}$ نجد:

$\exists x_1 : d(x_1, x_0) < \frac{1}{n} ; \tilde{d}(Tx_1, Tx_0) \geq \varepsilon$

$\exists x_2 : d(x_2, x_0) < \frac{1}{n} ; \tilde{d}(Tx_2, Tx_0) \geq \varepsilon$

$\vdots$

$\exists x_n ; d(x_n, x_0) < \frac{1}{n} ; \tilde{d}(Tx_n, Tx_0) \geq \varepsilon$

وبالتالي يكون لدينا $0 < d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$

بأخذ نهاية أطراف المتراجحة عندما $n \to \infty$ يكون:

$$\lim_{n\to\infty} 0 = 0 , \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

ومنه حسب مبرهنة الإحاطة يكون:

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_0) = 0$$

أي أن $\lim_{n\to\infty} \tilde{d}(Tx_n, Tx_0) = 0$ وهذا تناقض لأنه لدينا فرضاً $\tilde{d}(Tx_n, Tx_0) \geq \varepsilon$

ومنه الفرض الجدلي خاطئ أي أن T مستمر وهو المطلوب

③ إثبات أن الفضاء $C[a,b]$ المزود بالمسافة التالية $d(x,y) = \max_{t\in J} |x(t) - y(t)|$

حيث $x, y \in C[a,b]$ أنه تام

لنأخذ متتالية كوشية من الفضاء $C[a,b]$ ولتكن $\{x_n\}$ ولنثبت تقاربها ضمن الفضاء نفسه، كون x_n متتالية كوشية فهي تحقق:

① $\forall \varepsilon > 0 ; \exists N_0 \in \mathbb{N} ; n,m \geq N_0 ; \max_{a\leq t\leq b} |x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon , \forall t\in[a,b]$

من أجل $t_0 \in [a,b]$ مثبت، وبما أن الدوال هي دوال $\cancel{|x_n(t) - x_m(t)|}$ مستمرة، لو رسمنا من t_0 مستقيم عمودي لقطع كل دالة من المتتالية بنقطة واحدة فقط وبالتالي سيتشكل لدينا المتتالية الكوشية

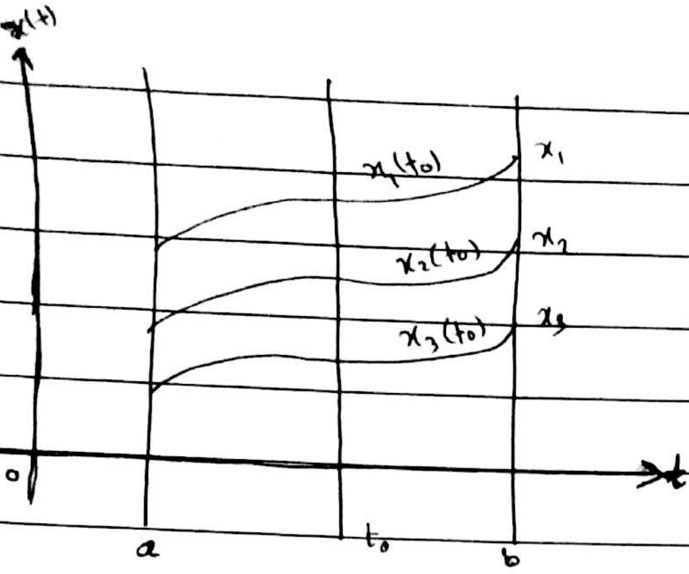
$x_1(t_0), x_2(t_0), x_3(t_0), \dots, x_n(t_0), \dots$

وهذه المتتالية كوشية في $\mathbb{R}$ من ① وكون $\mathbb{R}$ فضاء تام فإن كل كوشية فيه متقاربة في $\mathbb{R}$ أي أنه $x_m(t_0) \xrightarrow[m\to\infty]{} x(t_0)$ وبالتالي إذا حولنا t في جميع المواضع ضمن المجال $[a,b]$ فإنه سيكون لدينا في كل مرة متتالية كوشية في $\mathbb{R}$ وهي متقاربة من نقطة وحيدة أي يكون لدينا $x_m(t) \xrightarrow[m\to\infty]{} x(t)$

سيتشكل لدينا الدالة x المعرّفة على $[a,b]$ ولنبيّن أن $x \in C[a,b]$ وأن $x_m \to x$

سنثبت أن x هي نهاية للدالة وأنها مستمرة على $[a,b]$، لدينا من التعريف

$$\forall \varepsilon > 0 ; \exists N_0 \in \mathbb{N} ; n,m \geq N_0 ; \max_{a\leq t\leq b} |x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon$$



ويرى أنه من أجل كل t عندما $m \to \infty$

فإن $\max_{a\le t\le b} |x_n(t) - x(t)| < \varepsilon$

هذا يبيّن أنه ~~...~~ تتقارب $x_n(t)$ من $x(t)$

على $[a,b]$ (غير متقيد بالموضوع) ومنه فإن

الدالة النهائية x مستمرة على $[a,b]$

وذلك حسب مبرهنة ((إذا تقاربت x_n متتالية من

الدوال المستمرة المعرفة على $[a,b]$ تقارباً منتظماً على $[a,b]$

من الدالة x فإن دالة النهاية x هذه تكون مستمرة على $[a,b]$))

أي أن x دالة مستمرة $\Rightarrow x \in C[a,b]$ إذن المتتالية الكوشية (x_n)

متقاربة باستخدام من الدالة x في الفضاء $C[a,b]$ إذن الفضاء $C[a,b]$ تاماً بخصوص

المترك المعرّف عليه.

السؤال الثاني:

① لتكن لدينا $\bar{B}(0,1)$ الكرة الواحدية المغلقة حتى تكون محدبة يقتضي وقوع أي نقطتين x و y من

$\bar{B}(0,1)$ تحقق العلاقة: $\{z \in X;\ z = \alpha x + (1-\alpha) y;\ 0 \le \alpha \le 1\} \subset \bar{B}(0,1)$

لدينا $x, y \in \bar{B}(0,1)$; $\|x\| \le 1$, $\|y\| \le 1$

$$\forall \lambda \in [0,1] ;\ \|\lambda x + (1-\lambda) y\| \le \|\lambda x\| + \|(1-\lambda) y\|$$

$$= |\lambda| \cdot \|x\| + |(1-\lambda)| \cdot \|y\|$$

$$= \lambda \|x\| + (1-\lambda)\|y\| \le \lambda + 1 - \lambda = 1 \Rightarrow$$

$$\forall \lambda \in [0,1] ,\ \lambda x + (1-\lambda) y \in \bar{B}(0,1)$$

ومنه فإنّ $\bar{B}(0,1)$ مجموعة محدبة

② لدينا كون Y فضاء متجهي جزئي من X فإن $Y \ne \emptyset$ وبالتالي $\bar{Y} \ne \emptyset$

ولدينا كون Y فضاء متجهي جزئي فإن:

$\forall \alpha, \beta \in K$ (الحقل المعرف عليه الفضاء المتجهي) , $\forall y_1, y_2 \in Y \Rightarrow \alpha y_1 + \beta y_2 \in Y \subseteq \bar{Y}$

حسب تعريف اللصاقة

$$\Rightarrow \alpha y_1 + \beta y_2 \in \bar{Y}$$

ومنه $\bar{Y}$ فضاء متجهي جزئي من X أيضاً.

Scanned by CamScanner

جامعة دمشق　　　　امتحان التابعي (١)　　　　المدة ساعتان

كلية العلوم　　　　السنة الثالثة رياضيات　　　　الدورة الاضافية ٢٠١٥-٢٠١٦

السؤال الأول : أثبت صحة المقولتين الرياضتين التاليتين : (١)٢٥ درجة ، ٢)٣٠ درجة)

1) الشرط اللازم والكافي كي يكون التطبيق $T: X \to Y$ من فضاء متري (X, d) في فضاء متري $(X, \tilde{d})$ مستمراً في نقطة x_0 هو أن يقتضي الشرط $x_n \to x_0$ الشرط $Tx_n \to Tx_0$.

2) أثبت أن الفضاء الدالي $C[a, b]$ الموزود بالدالة المسافة :

$$d(x, y) = \underbrace{\max}_{t \in j} (x(t) - y(t))$$

$(x, y \in C[a, b])$ هو فضاء تام .

السؤال الثاني : أجب عما يلي: (A)15 درجة B)15 درجة C)15 درجة)

A)إذا كانت (x_n), (y_n) متتاليتين لكوشي في فضاء متري (X, d) فبين أن (a_n) ،حيث $a_n = d(x_n, y_n)$ ، متتالية متقاربة

B)أثبت أن الدالة d المعرفة على R (مجموعة الأعداد الحقيقة) حسب الدستور : $d(x, y) = (x - y)^2 \ : \ x, y \in R$ لا تحدد متركاً (دالة مسافة) على R

C)ليكن M فضاء جزئياً من ℓ^∞ مؤلفاً من كل المتتاليات $x = (\xi_k)$ التي حدود كل منها أصفاراً جميعاً باستثناء عدد منته من هذه الحدود عل الاكثر ،

أثبت أن M غير تام .

انتهت الأسئلة

الدورة الإضافية 2015 - 2016

السؤال الأول:

① تم حله في الدورة الإضافية 2016 - 2017 (السؤال الأول ②)

② تم حله في الدورة الإضافية 2016 - 2017 (السؤال الأول ③)

السؤال الثاني:

Ⓐ ليكن لدينا $(\mathbb{R}, |.|)$ الفضاء الاقليدي نريد إثبات أنّ a_n كوشية في هذا الفضاء حتى تكون متقاربة (لأن $\mathbb{R}$ تام كخصوص الفراغ الاقليدي فكل كوشية فيه متقاربة)

لدينا فرضاً $\{x_n\}$ كوشية $\Leftarrow$ $\forall \varepsilon > 0 : \exists N_x \in \mathbb{N} ; m, n \geq N_x \Rightarrow d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$

وأيضاً $\{y_n\}$ كوشية $\Leftarrow$ $\forall \varepsilon > 0 : \exists N_y \in \mathbb{N} ; m, n \geq N_y \Rightarrow d(y_n, y_m) < \frac{\varepsilon}{2}$

لنختار $\exists N = \max\{N_x, N_y\} \in \mathbb{N}$

$$\forall m, n \geq N ; d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} , d(y_n, y_m) < \frac{\varepsilon}{2}$$

لدينا $a_n = d(x_n, y_n) \leq \underbrace{d(x_n, x_m)}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{d(x_m, y_m)}_{a_m} + \underbrace{d(y_m, y_n)}_{< \frac{\varepsilon}{2}}$

$$\Rightarrow a_n - a_m < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

بنفس الطريقة نجد: $a_m - a_n < \varepsilon$

$$\Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$$

وبالتالي أصبح لدينا:

$$\forall \varepsilon > 0 ; \exists N \in \mathbb{N} ; n, m \geq N ; |a_n - a_m| < \varepsilon$$

تحقق شرط الكوشية ومنه a_n كوشية في $\mathbb{R}$ وبالتالي هي متقاربة

(الفضاء التام)

تم المطلوب

Ⓑ مثال واحد لا يحقق شروط المترك الأربعة ينفي القضية

لنأخذ $x = 0$ و $y = 4$ و $z = 2$

$d(x, y) = (0-4)^2 = 16$, $d(x, z) = (0-2)^2 = 4$, $d(z, y) = (2-4)^2 = 4$

$$\Rightarrow d(x, y) = 16 \not\leq d(x, z) + d(z, y) = 8$$

لم تتحقق متراجحة المثلث وبالتالي d لا يحدد مترك على $\mathbb{R}$.

Ⓒ للإثبات أن الفضاء M غير تام علينا إيجاد متتالية من عناصر M وغير متقاربة في M)
لنأخذ من عناصر الفضاء M المتتالية (x_n) المعرفة كما يلي :

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{i} & ; i = 1, 2, \ldots, n \\ 0 & ; i > n \end{cases}$$

(أي حسب المسألة عناصر M جميعها أصفاراً باستثناء عدد منته (n) من هذه الحدود على الأكثر
كالتالي :

$$x_1 := 1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots$$

$$x_2 := 1, \frac{1}{2}, 0, 0, \ldots, 0, \ldots$$

$$\vdots$$

$$x_n := 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, \ldots, 0, \ldots$$

$$\vdots$$

$$x_m := 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, 0, 0, \ldots, 0, \ldots$$

لنثبت أن (x_n) كوشية ولكنها غير متقاربة في M كما يلي :
نريد إثبات بالاعتماد على تعريف متتالية كوشي أن (x_n) تحقق الشرط التالي :

$$\forall \varepsilon > 0 ; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} ; n, m > N_\varepsilon ; d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

وبما أن $(x_n) \in M \subseteq \ell^\infty$ فإن المسافة على M هي كالتالي :

$$d(x_n, x_m) = \sup_{i \geq 1} \left| \xi_i^{(n)} - \xi_i^{(m)} \right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \quad \ldots Ⓐ$$

(إن الفرق بين x_n و x_m هي $\frac{1}{n+1}$ لأن الفروق قبلها قيم سالبة وبعدها أصفار)
وبالتالي حسب خاصية أرخميدس $(\forall x, y \in \mathbb{R} ; x > 0 ; \exists n \in \mathbb{N} ; n \cdot x > y)$
بوضع $x = 1$ و $y = \frac{1}{\varepsilon}$ نجد أن

$$\exists n = N_\varepsilon \in \mathbb{N} ; N_\varepsilon \cdot x > y \Rightarrow N_\varepsilon (1) > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon$$

وبما أن $m > n > N_\varepsilon \Leftarrow \frac{1}{m} < \frac{1}{n} < \frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon$
وبالتعويض في Ⓐ نجد أن :

$$d(x_n, x_m) < \frac{1}{n} < \frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon$$

إذن تحقق شرط كوشي وبالتالي فإن المتتالية (x_n) كوشية
ولما كانت (x_n) كوشية في الفضاء ℓ^∞ التام فهي متقاربة في ℓ^∞ وبالنظر في متتاليات الأعمدة السابقة
نجد أن هذه المتتاليات تتقارب من حدود المتتالية $x = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \underbrace{\frac{1}{n+1}, \ldots\ldots}_{\text{ليست أصفار}})$
على التوالي ، نجد أن $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x$
ولكن $x \notin M$ لأن حدودها لا تحوي أصفاراً وبالتالي (x_n) ليست متقاربة في الفضاء الجزئي M
ومنه فإن M غير تام . تم المطلوب

انتهى حل الدورة

/ /

. الدورة الإضافية 2014 - 2015

. أجب عن الأسئلة التالية : (1) 15 درجة ، (2) 20 درجة ، (3) 25 درجة

. 1)- عرف المفاهيم الرياضية التالية :
. المجموعة المفتوحة - المسافة بين مجموعتين - المجموعة المحدبة - الفضاء التام - الفضاء الفصول .
. 2)- الشرط اللازم والكافي كي يكون $x \in \bar{M}$ (حيث M مجموعة جزئية غير خالية
. من فضاء متري (X, d)) هو أن توجد متتالية (x_n) في M بحيث $x_n \to x$
. 3)- كل فضاء جزئي منتهي البعد Y من فضاء منظم X لا بد أن يكون تاماً وبوجه خاص
. فإن كل فضاء منظم منتهي البعد تام .

. السؤال الثاني : أجب عما يلي : (A) 15 درجة ، (B) 15 درجة ، (C) 10 درجة
. A)- إذا كان (X, d) فضاء متري بين فيما إذا كانت الدالة $\bar{d}$ المعرفة حسب الدستور :
. $\bar{d}(x, y) = \ln(1 + d(x, y))$ $x, y \in X$ ، تحدد متركاً (دالة مسافة) على X
. B)- نعرف على الفضاء $C[a, b]$ النظيمين :

$$\|x\|_1 = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\int_a^b |x(t)|^2 dt}$$

ادرس تكافؤ هذين النظيمين .
. C)- علل صحة أو خطأ المقولة الرياضية التالية :
. صورة المجموعة المفتوحة وفق تطبيق مستمر ليست بالضرورة مجموعة مفتوحة

" انتهت الأسئلة "

السؤال الأول :

1)ـ المجموعة المفتوحة : نقول عن مجموعة A في فضاء متري (X,d) إنها مفتوحة إذا حوت جواراً لكل نقطة من نقاطها .

المسافة بين مجموعتين : نعرف المسافة $D(A,B)$ بين مجموعتين غير خاليتين A,B في فضاء متري (X,d) بأنها :
$$D(A,B) = \inf_{\substack{a\in A \\ b\in B}} d(a,b)$$

المجموعة المحدبة : نقول عن المجموعة A من فضاء منظم $(X,\|\cdot\|)$ إنها محدبة إذا اقتضى وقوع نقطتين x,y في A تحقق العلاقة :
$$M = \{Z\in X ; Z = \alpha x + (1-\alpha)y ; 0<\alpha<1\} \subsetneq A$$

الفضاء التام : نقول عن الفضاء المتري (X,d) إنه تام إذا كانت كل متتالية كوشية فيه متقاربة فيه .

الفضاء الفصول : نقول عن فضاء إنه فصول إذا وجدت فيه مجموعة كثيفة فيه وعدودة .

2)ـ أثبت أن (الشرط اللازم والكافي كي يكون $x\in\bar{M}$ (حيث M مجموعة جزئية غير خالية من فضاء متري (X,d)) هو أن توجد متتالية (x_n) في M بحيث : $x_n \to x$

(لزوم الشرط) : $\Leftarrow$

لنفرض أن $x\in\bar{M}$ ، نعلم أن $\bar{M} = M\cup M'$ عندئذ نميز حالتين :

1)ـ $x\in M$ ، عندئذ توجد المتتالية الثابتة $(x,x,\dots)$ من عناصر M ونهايتها x .

2)ـ $x\notin M$ ومنه $x\in M'$ أي x نقطة تراكم لـ M ، وبالتالي كل كرة مفتوحة مركزها x تحوي كل نقاط M ماعدا عدد منته منها . وبالتالي سوف نختار الكرات من الشكل : $B(x,\frac{1}{n})$ ومنه من أجل كل قيمة لـ $n\in \mathbb{N}$ نحصل على العناصر $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \in M$ وبالتالي كلما سعت $\frac{1}{n}$ نحو الصفر فإن (x_n) ستسعى نحو x أي العناصر السابقة سوف تتراكم حول x

وهذا يكافئ وجود متتالية (x_n) من عناصر M بحيث $x_n \to x$

(كفاية الشرط) $\Rightarrow$.

لنفرض وجود متتالية (x_n) بحيث: $x_n \to x$ ولنثبت أن $x \in \bar{M}$

نميز حالتين:

1) $x \in M$ $\Leftarrow$ بما أن $M \subseteq \bar{M}$ فإن $x \in \bar{M}$

2) $x \notin M$ $\Leftarrow$ أي جوار محذوف لـ x يحوي حتماً نقاط x_n من M مغايرة لـ x وبالتالي $x \in M'$ ولكن $M' \subseteq \bar{M}$ أي أن $x \in \bar{M}$

3) أثبت أن كل فضاء جزئي منتهي البعد Y من فضاء منظم X لابد أن يكون تاماً. ولوحده خاص كل فضاء منظم منتهي البعد تام

الإثبات:

ليكن Y فضاء جزئي منتهي البعد من فضاء منظم X عندئذ:

لتكن $(y_m)_{m \geq 1}$ متتالية كيفية كوشية من عناصر Y. لنبرهن أن هذه المتتالية متقاربة في الفضاء Y.

- بما أن (y_m) كوشية فإنه حسب تعريف متتالية كوكي في فضاء منظم.

$$\forall \varepsilon_1 > 0 : \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \ ; \ m, r > N_\varepsilon : \|x_m - x_r\| < \varepsilon_1$$

لدينا Y منتهي البعد، لنفرض أن: $(\dim Y = n)$ عندئذ لتوجد جملة مستقلة خطياً من المتجهات: $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ جزئية من Y وتشكل قاعدة له.

بما أن (y_m) من عناصر Y فإن عناصرها تكتب على شكل تركيب خطي وحيد بدلالة متجهات قاعدة Y بالشكل:

$$y_m = \alpha_1^{(m)} e_1 + \alpha_2^{(m)} e_2 + \dots + \alpha_n^{(m)} . e_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(m)} . e_j$$

أيضاً: $$y_r = \alpha_1^{(r)} e_1 + \alpha_2^{(r)} e_2 + \dots + \alpha_n^{(r)} . e_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(r)} . e_j$$

$\alpha_j^{(r)}$, $\alpha_j^{(m)}$ عناصر من الحقل k المعرف عليه الفضاء المتجهي، وذلك

ومنه بالعودة لتعريف متتالية كوشي:

$$\|x_m - x_r\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(m)} e_j - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(r)} . e_j \right\| < \varepsilon_1$$

/ /

وحسب (خاصية التراكيب الخطية) نجد :

$$\exists c>0 ;\ \varepsilon > \left\| \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}) e_j \right\| \geq c \left(\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}| \right)$$

نقسم على $(0<c)$ فنجد :

$$\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}| < \frac{\varepsilon}{c} \Rightarrow$$

$$|\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}| < \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}| < \frac{\varepsilon}{c}$$

وبالتالي نكون قد حصلنا على n متتالية كوشية في $(\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C})$ وهي $\alpha_j^{(m)}$ وذلك من أجل كل اختيار للدليل j $(1 \leq j \leq n)$ وبما أن $(\mathbb{R}$ و $\mathbb{C})$ فضاءين تامين فكل من هذه المتتاليات متقاربة ، أي أن : $(\alpha_j^{(m)} \xrightarrow[m\to\infty]{} \alpha_j)$

وبالتالي نحصل على العناصر $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

ولنضع y (النهاية المفترضة لـ (y_m)) بالشكل : $y = \alpha_1 \cdot e_1 + \dots + \alpha_n \cdot e_n$

نجد أن :

$(y \in Y)$ لأنه كتب كتركيب خطي بدلالة عناصر قاعدة Y وبالتالي :

$$\|y_m - y\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j^{(m)} - \alpha_j) e_j \right\| \leq \sum_{j=1}^{n} \left(|\alpha_j^{(m)} - \alpha_j| \cdot \|e_j\| \right).$$

وبما أن : $\alpha_j^{(m)} \xrightarrow[m\to\infty]{} \alpha_j$. فإن $\|y_m - y\| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ ومنه y نهاية لمتتالية كوشي (y_m).

وبما أن (y_m) متتالية كيفية فإن كل متتالية كوشية من عناصر Y متقاربة (لها نهاية) في Y . أي أن Y فضاء تام.

السؤال الثاني :

A) - إذا كان (X,d) فضاء متري فبين فيما إذا كانت الدالة $\tilde{d}$ المعرفة بالشكل :

$$\tilde{d}(x,y) = \ln(1 + d(x,y)) \quad ; x,y \in X$$

تحدد متركاً لدالة مسافة على X .

الحل : لنتحقق من شروط المسافة :

$\boxed{1}$ - $\forall x,y \in X : \ln(1 + d(x,y)) \geq 0 \Rightarrow \tilde{d}(x,y) \geq 0$

(لأن $d(x,y)$ مسافة على X) .

/ /

$\boxed{2}$ $\forall x,y \in X : \tilde{d}(x,y) = 0 \Rightarrow \ln(1+d(x,y)) = 0 \Rightarrow d(x,y) = 0$

وبما أن $d(x,y)$ مسافة على X فإن : $(d(x,y)=0 \Rightarrow x=y)$

$\boxed{3}$ $\forall x,y \in X : \tilde{d}(x,y) = \ln(1+d(x,y)) = \ln(1+d(y,x)) = \tilde{d}(y,x)$

(لأن $d(x,y)$ مسافة على X)

$\boxed{4}$ $\forall x,y,z \in X$:

بما أن d مسافة على X فإن :

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

نضيف (1) للطرفين فنجد :

$$1+d(x,y) \leq 1+d(x,z) + d(z,y)$$

نضيف للطرف الأيمن المقدار $(d(x,z).d(z,y) \geq 0)$ والذي لن يؤثر على جهة المتراجحة .

$$\Rightarrow (1+d(x,y)) \leq 1+d(x,z) + d(z,y) + d(x,z).d(z,y)$$
$$= (1+d(x,z)).(1+d(z,y))$$

نأخذ لوغاريتم الطرفين فنجد :

$$\ln(1+d(x,y)) \leq \ln((1+d(x,z)).(1+d(z,y)))$$

وحسب خواص اللوغاريتم :

$$\ln(1+d(x,y)) \leq \ln((1+d(x,z)) + \ln(1+d(z,y))$$

$$\tilde{d}(x,y) \leq \tilde{d}(x,z) + \tilde{d}(z,y)$$

مما سبق $\tilde{d}$ تشكل دالة مسافة على X .

B) _ نعرف على الفضاء $C[a,b]$ النظيمين :

$$\|x\|_1 = \max_{a\leq t\leq b} |x(t)| \quad , \|x\|_2 = \sqrt{\int_a^b |x(t)|^2 . dt}$$

ادرس تكافؤ هذين النظيمين

/ /

الحل: لنأخذ على الحال $[a,b]=[0,1]$ المتتالية التالية:

$$f_n(t)=t^n \quad ; \quad t\in[0,1] \quad ; \quad n\in\mathbb{N}$$

عندئذٍ:

$$\|f_n\|_1=\max_{0\leq t\leq 1}|t^n|=1$$

$$\|f_n\|_2=\sqrt{\int_0^1 |t^n|^2\,dt}=\sqrt{\int_0^1 |t|^{2n}\,dt}$$

$$=\sqrt{\left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1} \Rightarrow \|f_n\|_2=\sqrt{\frac{1}{2n+1}}$$

لكي يكون النظيمين متكافئين يجب أن نتحقق:

$$\exists c_1,c_2>0 \; ; \; c_1\,\|f_n\|_2\leq\|f_n\|_1\leq c_2\,\|f_n\|_2$$

$$\Rightarrow c_1\leq\frac{\|f_n\|_1}{\|f_n\|_2}\leq c_2 \Rightarrow c_1\leq\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2n+1}}}\leq c_2$$

$$\Rightarrow c_1^2\leq\frac{1}{\frac{1}{2n+1}}\leq c_2^2 \Rightarrow c_1^2\leq 2n+1\leq c_2^2$$

لننظر مثلاً في المتراجحة: $2n+1\leq c_2^2$ بحيث $c_2>0$ ، $n\in\mathbb{N}$

إن هذه المتراجحة ليست محققة بحيث: $(\forall n\in\mathbb{N})$.

وبالتالي النظيمين $\|x\|_1$ ، $\|x\|_2$ ليسا متكافئين على الفضاء $[0,1]$

c)- علل صحة أم خطأ المقولة الرياضية التالية:

صورة المجموعة المفتوحة وفق تطبيق مستمر ليست بالضرورة مجموعة مفتوحة.

كل المقولة خاطئة لأنه ليس بالضرورة تحقق ذلك. والمثال المعاكس:

لنأخذ التطبيق:

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto \sin x$$

إن هذا التطبيق مستمر. لنأخذ المجموعة المفتوحة $]0,2\pi[$ فنجد أن:

$g(]0,2\pi[) = [-1,+1[\longrightarrow$ مغلق

في $\mathbb{R}$ وليس مفتوح.

- انتهى حل الأسئلة -

الفصل الثاني : 2015 - 2016

أجب عن جميع الأسئلة التالية :

السؤال الأول : أجب عما يلي : (1) 25 درجة ، (2) 20 درجة ، (3) 15 درجة

1)- كل فضاء جزئي منتهي البعد Y من فضاء منظم X لابد أن يكون تاماً. وبوجه خاص فإن كل فضاء منتظم منتهي البعد تام.

2)- عرّف الفضاء ثم أثبت أنه فضاء غير منفصل.

3)- أثبت أن كل فضاء متري هو فضاء طبولوجي.

السؤال الثاني : أجب عما يلي : (A) 15 درجة ، (B) 15 درجة ، (C) 10 درجة

A)- هل تحدد المساواة $d(x,y) = \sqrt{|x-y|}$ متركاً على مجموعة الأعداد الحقيقية (مع التعليل)؟

B)- إذا كان (X, d) فضاءاً تاماً فبرهن على أن الفضاء $(X, \bar{d})$ ، حيث $\bar{d} = \frac{d}{1+d}$ فضاء تام كذلك.

C)- ادرس تقارب المتتالية التي حدها العام $x_n = (\underbrace{\frac{1}{n}, \ldots\ldots, \frac{1}{n}}_{(n^2)\text{ مرة}}, 0, 0, 0, \ldots)$ في الفضاء l^2.

- انتهت الأسئلة -

/ /

السؤال الأول :

1)- كل فضاء جزئي من فضاء منتهي البعد Y من فضاء منظم X لابد أن يكون تاماً وبوجه خاص فإن كل فضاء منظم منتهي البعد تام.

2)- عرف الفضاء l^{∞} ، ثم أثبت أنه غير فصول.

3)- أثبت أن كل فضاء متري هو فضاء طبولوجي.

1)- ليكن Y فضاء جزئي منتهي البعد من فضاء منظم X عندئذ :

لتكن $(y_m)_{m\geq 1}$ متتالية كيفية كوشية من عناصر Y لنبرهن أن هذه المتتالية متقاربة في الفضاء Y.

بما أن (y_m) كوشية فإنه حسب تعريف متتالية كوشي في فضاء منظم.

$$\forall \varepsilon>0 : \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} ; m,r > N_\varepsilon : \|x_m - x_r\| < \varepsilon$$

لدينا Y منتهي البعد ، لنفرض أن : $(\dim Y = n)$ عندئذ توجد جملة مستقلة خطياً من المتجهات $\{e_1, e_2, \dots e_n\}$ جزئية من Y وتشكل قاعدة له.

بما أن (y_m) من عناصر Y فإن عناصرها تكتب على شكل تركيب خطي وحيد بدلالة متجهات قاعدة Y بالشكل :

$$y_m = \alpha_1^{(m)} e_1 + \alpha_2^{(m)} . e_2 + \dots + \alpha_n^{(m)} . e_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(m)} . e_j$$

أيضاً :

$$y_r = \alpha_1^{(r)} e_1 + \alpha_2^{(r)} . e_2 + \dots + \alpha_n^{(r)} e_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(r)} . e_j$$

حيث $\alpha_j^{(m)}, \alpha_j^{(r)}$ عناصر من الحقل K المعرف عليه الفضاء المتجهي وذلك $\forall j = 1, 2, \dots, n$ معينة . بالعودة لتعريف متتالية كوشي :

$$\|x_m - x_r\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(m)} . e_j - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(r)} . e_j \right\| < \varepsilon$$

وحسب (تمهيدية التراكيب الخطية) نجد :

$$\exists c>0 ; \varepsilon > \left\| \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}) e_j \right\| \geq c \left(\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}| \right)$$

/ /

نقسم على $(0<C)$ فنجد : $\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}| < \frac{\varepsilon}{C}$

$$|\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}| < \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}| < \frac{\varepsilon}{C}$$

وبالتالي نكون قد حصلنا على n متتالية كوشية في $(\mathbb{K} \text{ أو } \mathbb{R})$
وهي $\alpha_j^{(m)}$ وذلك من أجل كل اختيار للدليل j $(1 \leq j \leq n)$ وبما أن
$(\mathbb{R} ; \mathbb{C})$ فضاءين تامين فكل من هذه المتتاليات متقاربة ، أي أن :
$$(\alpha_j^{(m)} \xrightarrow[m\to\infty]{} \alpha_j)$$

وبالتالي نحصل على العناصر $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$
ونضع y (النهاية المفترضة لـ (y_m)) بالشكل : $y = \alpha_1 . e_1 + \alpha_2 . e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$
حيث أن :
$(y \in Y)$ لأنه كتب كتركيب خطي بدلالة عناصر قاعدة Y . وبالتالي :
$$\|y_m - y\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j^{(m)} - \alpha_j) e_j \right\| \leq \sum_{j=1}^{n} \left(|\alpha_j^{(m)} - \alpha_j| \cdot \|e_j\| \right)$$

وبما أن : $\alpha_j^{(m)} \xrightarrow[m\to\infty]{} \alpha_j$ فإن $\|y_m - y\| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ ومنه y نهاية

لمتتالية كوشي (y_m) . وبما أن (y_m) متتالية كيفية فإن كل متتالية كوشية
من عناصر Y متقاربة (لها نهاية) في Y . أي أن Y فضاء تام .

2) تعريف الفضاء l^∞ : هو مجموعة كل المتتاليات المحدودة من الأعداد العقدية، أي أن :
$$x \in l^\infty : x = (\xi_i)_{i\geq 1} \Leftrightarrow \exists C_x \in \mathbb{R} : |\xi_i| \leq C_x : \forall i \geq 1$$
(حيث C_x يتبع لـ x)، ولكن الفضاء l^∞ غير محدود بالكامل ، أي لا يوجد عنصر حقيقي
يحد الفضاء بالكامل (وندعو المحدودية في هذا الفضاء محدودية غير منتظمة) .
لنثبت الآن أن الفضاء l^∞ غير فصول .
لإثبات أن الفضاء l^∞ غير فصول يكفي أن نثبت أن أية مجموعة M من عناصر l^∞
كثيفة فيه لن تكون معدودة . ومن أجل ذلك نقوم بما يلي :

/ /

لنأخذ في هذا الفضاء المتتاليات التي عناصرها أصفار أو واحدات فقط. عندئذ:
لتكن المتتالية:
$y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \dots)$ عناصرها 0 أو 1 فقط، إن $y \in l^\infty$ لأن $|\eta_i| \le 1$
أي أن y متتالية محدودة، ثم لنقرن بالمتتالية y عدداً حقيقياً $\bar{y}$ والذي تمثيله الثنائي هو:

$$\bar{y} = \frac{\eta_1}{2^1} + \frac{\eta_2}{2^2} + \frac{\eta_3}{2^3} + \dots + \frac{\eta_n}{2^n} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\eta_i}{2^i}$$

إن المتسلسلة الأخيرة متقاربة، لأنها ذات حدود غير سالبة من جهة، وأصغر من المتسلسلة الهندسية المتقاربة $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^i$ من جهة أخرى، وهي أصغر منها لأن $\bar{y}$ تحوي أصفاراً ضمن حدودها، وبالتالي حسب معيار المقارنة $\bar{y}$ متقاربة.
الآن: بملاحظة أن لكل عدد $\bar{y}$ تمثيل ثنائي، وحيث تكون جميع هذه التمثيلات مختلفة وأن كل عدد $\bar{y}$ يقابل نقطة من نقاط الفترة الحقيقية $[0,1]$ وأن هذه الفترة غير معدودة (لأنها تقابل مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ والتي هي غير معدودة كما نعلم)
يتضح لدينا أنه يوجد في l^∞ مجموعة غير معدودة من المتتاليات التي عناصرها أصفار أو واحدات. وبما أن المترك المختار على الفضاء l^∞ هو:
$d(x,y) = \sup_{i \ge 1} |\xi_i - \eta_i|$ حيث $x = (\xi_i)_{i \ge 1}$ ، $y = (\eta_i)_{i \ge 1}$ فإنه
يتضح أن المسافة بين أي متتاليتين مختلفتين من النمط المذكور 1.
عندئذ لو أخذنا حول كل متتالية y جواراً نصف قطره ε حيث نختار $\varepsilon = \frac{1}{3}$ فإن هذه الكرات لن تتقاطع حتماً، وبالتالي سيتشكل لدينا مجموعة غير معدودة من الكرات غير المتقاطعة.
مما سبق نستنتج أنه إذا كانت M أية مجموعة كثيفة في l^∞، فإن كل من الكرات غير المتقاطعة سيحوي حتماً عنصراً من M (وذلك حسب تعريف المجموعة الكثيفة إذ إن المجموعة تكون كثيفة إذا كان تقاطعها مع أي مجموعة مفتوحة في الفضاء غير خالٍ، والكرات المفتوحة التي أخذناها هي مجموعات مفتوحة)
وذلك يبين لنا أن M لن تكون معدودة، وعليه، لا يمكن أن توجد في الفضاء l^∞ مجموعة كثيفة ومعدودة في وقت واحد. إذن الفضاء l^∞ غير فصول وبذلك يتم المطلوب

/ /

3- ليكن (X,d) فضاءً متريًا، بحيث $X \neq \phi$ و d دالة مسافة على X ولنضع τ_d رمزًا لصف المجموعات المفتوحة في الفضاء (X,d)، حيث أنه تكون مجموعة A مفتوحة في (X,d) إذا كانت كرة مفتوحة أو كانت اتحادًا لكرات مفتوحة عندئذٍ فإن τ_d تشكل طبولوجيا على X ندعوها الطبولوجيا المولدة من المسافة d ولنثبت صحة ذلك:

أ- $X, \phi \in \tau_d$: إن $X \in \tau_d$ لأنه إذا كانت $x \in X$ فإنه بأخذ $r=1$ نجد أن الكرة المفتوحة (الجوار) $N(x,1)$ محتواة تمامًا في X أي أيًا كانت $x \in X$ فإن نقطة داخلية في X وبالتالي X مفتوحة ومنه $X \in \tau_d$ وإن $\phi \in \tau_d$ لأنه لو افترضنا جدلاً أن ϕ غير مفتوحة لوجد عنصر $x \in \phi$ ليس له أي جوار محتوى تمامًا في ϕ (أي لوجدت نقطة من ϕ ليست داخلية فيها) ولكن ϕ لا تحوي نقاطًا، إذًا الفرض الجدلي خاطئ و ϕ مجموعة مفتوحة أي $\phi \in \tau_d$

ب)- التقاطع المنتهي لعناصر من τ_d هو عنصر من τ_d (أي التقاطع المنتهي لمفتوحات مفتوحة) لتكن $A_1, A_2, \dots, A_n \in \tau_d$ ولنثبت أن $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \in \tau_d$ وسنثبت ذلك بالاستقراء الرياضي على n.

لنثبت صحة القضية من أجل $n=2$: لتكن $A_1, A_2 \in \tau_d$ عندئذٍ إذا كان $A_1 \cap A_2 = \phi$ تم المطلوب.

1- لنفرض أن $A_1 \cap A_2 \neq \phi$ عندئذٍ $\forall x \in A_1 \cap A_2$ فإن $x \in A_1$, $x \in A_2$ وبالتالي:

بما أن A_1 مفتوحة، $x \in A_1$ فإنه يوجد $r_1 > 0$ بحيث $N(x,r_1) \subseteq A_1$ أيضًا

بما أن A_2 مفتوحة، $x \in A_2$ فإنه يوجد $r_2 > 0$ بحيث $N(x,r_2) \subseteq A_2$

لنأخذ $r = \min\{r_1, r_2\}$ فنجد أن:

$$N(x,r) \subseteq N(x,r_1) \cap N(x,r_2) \subseteq A_1 \cap A_2$$

عندئذٍ فإن x نقطة داخلية في $A_1 \cap A_2$ ولما كانت x نقطة كيفية من $A_1 \cap A_2$ فإن $A_1 \cap A_2$ مجموعة مفتوحة، أي أن: $A_1 \cap A_2 \in \tau_d$

2- لنفترض الآن أن العلاقة صحيحة من أجل $n-1$ أي: $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1} \in \tau_d$ ولنثبتها لأجل n: نلاحظ أن

/ /

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_n = \underbrace{\underbrace{\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k\right)}_{\in \tau_d}}_{\text{حسب الفرض الاستقرائي}} \cap A_n \in \tau_d$$

$\in \tau_d$

وبالتالي العلاقة محققة من أجل n أي أن $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \in \tau_d$ وتم المطلوب

ج)- الاتحاد الكيفي لعناصر من τ_d هو عنصر من τ_d .

لتكن $\{A_i : i \in I\}$ جماعة كيفية من عناصر τ_d ولنبين أن اتحاد عناصرها ينتمي الى τ_d لاحظ أن:

$$\forall x \in \bigcup_{i\in I} A_i : \exists i_0 \in I : x \in A_{i_0}$$

وبما أن A_{i_0} مفتوحة فإنه يوجد $r_0>0$ بحيث:

$$N(x,r_0) \subseteq A_{i_0} \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$$

وبالتالي الاتحاد هو مجموعة مفتوحة أي هو عنصر من τ_d

من أ) و ب) و ج) نجد أن τ_d طبولوجيا على X بالفعل ، وهكذا يكون الفضاء (X, τ_d) فضاء طبولوجي وتم المطلوب.

السؤال الثاني:

A)- نعم، d تحدد متريكا على مجموعة ، ولنبين ذلك بالتحقق من شروط المترك الأربعة:

$\forall x,y,z \in \mathbb{R}$

1)- $|x-y| \geq 0 \Rightarrow \sqrt{|x-y|} \geq 0 \Rightarrow d(x,y) \geq 0$

2)- $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{|x-y|} = 0 \Leftrightarrow |x-y| = 0$

$\Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow x=y$

3)- $d(x,y) = \sqrt{|x-y|} = \sqrt{|y-x|} = d(y,x)$

4)- $|x-y| = |x-z+z-y| \leq |x-z| + |x-y|$

/ /

$$\leq \sqrt{|x-z|} + \sqrt{|x-y|} \leq \left(\sqrt{|x-z|} + \sqrt{|z-y|}\right)^2$$

بجذر طرفي المتراجحة نجد:

$$\sqrt{|x-y|} \leq \sqrt{|x-z|} + \sqrt{|z-y|} \Rightarrow d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

وبالتالي جميع الشروط محققة ← d متري على $\mathbb{R}$ بالفعل.

B- لنفرض أن الفضاء (X,d) تام، ولنبرهن على الفضاء $(X,\tilde{d})$ أيضاً تام. ومن أجل ذلك لنبرهن على أن كل متتالية كوشية في $(X,\tilde{d})$ تكون متقاربة منه.

لتكن (x_n) اية متتالية كوشية في الفضاء $(X,\tilde{d})$ ← حسب تعريف متتالية كوشي نكتب: $\forall \varepsilon>0 : \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n,m \geq N_\varepsilon : \tilde{d}(x_n,x_m) < \varepsilon$

وبالتالي

$$\tilde{d}(x_n,x_m) < \varepsilon \Rightarrow \frac{d(x_n,x_m)}{1+d(x_n,x_m)} < \varepsilon \Rightarrow d(x_n,x_m) < \varepsilon + \varepsilon\, d(x_n,x_m)$$

$$\Rightarrow d(x_n,x_m) - \varepsilon . d(x_n,x_m) \Rightarrow d(x_n,x_m)(1-\varepsilon) < \varepsilon$$

وبما أن ε اختياري فنختاره بحيث يكون: $(1-\varepsilon) > 0 \Leftarrow 0<\varepsilon<\frac{1}{2}$ وبالتالي:

$$d(x_n,x_m)(1-\varepsilon) < \varepsilon \Rightarrow d(x_n,x_m) < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} < 2\varepsilon$$

وبالتالي من أجل $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$ يوجد $N_\varepsilon \in N$ بحيث عندما $n,m \geq N_\varepsilon$ يكون $d(x_n,x_m)<2\varepsilon$ ومنه المتتالية (x_n) كوشية في (X,d) وبما أن (X,d) تام فرضاً فإن (x_n) متقاربة فيه من عنصر $x \in X$ وبالتالي: $\tilde{d}(x_n,x) \to 0$ عندما $n \to \infty$ وبالتالي:

$$\tilde{d}(x_n,x) = \frac{d(x_n,x)}{1+d(x_n,x)} \to \frac{0}{1+0} = 0$$

وبالتالي: $\tilde{d}(x_n,x) \to 0$ عندما $n\to\infty$ في الفضاء $(X,\tilde{d})$ اذن (x_n) متقاربة في $(X,\tilde{d})$ ولما كانت المتتالية (x_n) كوشية كيفية من عناصر $(X,\tilde{d})$ كان $(X,\tilde{d})$ فضاءً تاماً. وتم المطلوب.

/ /

c) - نعلم أن كل متتالية متقاربة تكون كوشية دوماً، وبالتالي (حسب المكافئ العكسي) إن لم تكن المتتالية كوشية فلن متقاربة، كما أننا نعلم أن الفضاء l^2 فضاء تام أي كل متتالية كوشية فيه متقاربة وبالتالي يمكننا نقل دراسة تقارب المتتالية المعطاة إلى دراسة كون هذه المتتالية كوشية أم لا، فإذا كانت كوشية كانت متقاربة لأن الفضاء تام، وإذا لم تكن كوشية تكون غير متقاربة حسب ما ذكرنا قبل قليل.

إذن لنرى فيما إذا كانت المتتالية المعطاة كوشية أم لا، أي لنرى فيما إذا كانت المتتالية (x_n) تحقق شرط كوشي التالي أم لا:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N_\varepsilon : d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

سنفرض (دون المس بعمومية المسألة) $m > n$ عندئذٍ:

$$x_n = (\underbrace{\tfrac{1}{n}, \dots, \tfrac{1}{n}}_{n^2 \text{ مرة}}, 0, 0, \dots), \quad x_m = (\underbrace{\tfrac{1}{m}, \dots, \tfrac{1}{m}}_{m^2 \text{ مرة}}, 0, 0, \dots)$$

ونعلم أن التراكي المعرف على الفضاء l^2 هو: $d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \eta_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

وبالتالي:

$$(d(x_n, x_m))^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \eta_i|^2 = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|^2 + \dots + \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|^2 + \underbrace{\left|\frac{1}{m}\right|^2 + \dots + \left|\frac{1}{m}\right|^2}_{(m^2 - n^2) \text{ مرة}} + \dots$$

(لأن $m > n$)

$$\Rightarrow (d(x_n, x_m))^2 = n^2 \cdot \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|^2 + (m^2 - n^2) \cdot \left|\frac{1}{m}\right|^2$$

لدينا $m > n \Rightarrow \frac{1}{m} < \frac{1}{n}$ وبالتالي: $\left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right)$ ، $\left|\frac{1}{m}\right| = \frac{1}{m}$ ، ومنه يكون:

$$(d(x_n, x_m))^2 = n^2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right)^2 + (m^2 - n^2)\left(\frac{1}{m}\right)^2 = n^2\left(\frac{m-n}{m \cdot n}\right)^2 + \frac{(m^2 - n^2)}{m^2}$$

$$\Rightarrow (d(x_n, x_m))^2 = n^2\left(\frac{m^2 - 2mn + n^2}{n^2 \cdot m^2}\right) + \left(1 - \frac{n^2}{m^2}\right)$$

$$= \left(\frac{m^2 - 2mn + n^2}{m^2}\right) + \left(1 - \frac{n^2}{m^2}\right)$$

/ /

$$\Rightarrow \left(d(x_n,x_m)\right)^2 = 1 - 2\frac{n}{m} + \frac{n^2}{m^2} + 1 - \frac{n^2}{m^2} = 2 - 2\frac{n}{m} = 2\left(1 - \frac{n}{m}\right)$$

$$\Rightarrow d(x_n,x_m) = \sqrt{2}\cdot\sqrt{\left(1-\frac{n}{m}\right)} \quad : m > n \geq N ,\ N \in \mathbb{N} .$$

لو افترضنا الآن $\varepsilon = \frac{1}{2}$ و $m = 2n$ لوجدنا أن :

$$d(x_n,x_m) = \sqrt{2}\cdot\sqrt{\left(1-\frac{n}{2n}\right)} = \sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon$$

وبالتالي المتتالية (x_n) ليست كوشية وبالتالي فهي ليست متقاربة .

.. انتهى الحل ..