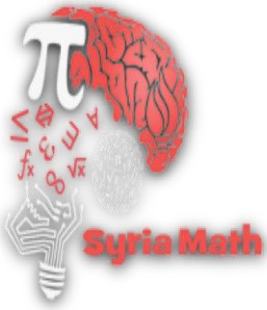

◄ دكتور المادة : حمزة الحاكمي

◄ المحاضرة : الثالثة والعشرين والاخيرة ◄ عنوان المحاضرة : تصنيف الزمر

تمهيدية : لتكن G زمرة مرتبتها $p.q$ حيث p,q اعداد أولية تحقق $p<q$ وأن p لايقسم $q-1$ عندئذ تكون الزمرة G دوارة وتماثل $Z_{p.q}$ أي $G\cong Z_{p.q}$.

البرهان :

بما ان p,q اعداد أولية تحقق $p<q$ وأن p لا يقسم $q-1$ فإن $2<p<q$ وأن $gcd(p,q)=1$

وأن مجموعة قواسم العدد $p.q$ هي $\{1,p,q,p.q\}$ و أن $(G:1)=p.q$

ومنه إن G تحوي $p-$ زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها P **ولتكن** $\boldsymbol{K}$

إن G تحوي $q-$ زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها q **ولتكن** $\boldsymbol{H}$

إن كلاً من $\boldsymbol{K,H}$ **دوارة .**

لنفرض أن $\boldsymbol{K=<y>}$, $\boldsymbol{H=<x>}$

وحسب مبرهنة سيلوف الثالثة : إن عدد جميع ال $p-$ زمر الجزئية السيلوفية في G يساوي $1+pk$ ويقسم $p.q$ أي أن $1+pk\in\{1,p,q,p.q\}$ عندها من اجل

$k=0$ $\quad$ 1 مقبول

$k=1$ $\quad$ $1+p=p$ مرفوض

$1+p=q$ مرفوض

$$1+p=qp\Rightarrow p(q-1)=1\Rightarrow p=\frac{1}{q-1}$$ مرفوض

ومنه نجد أن لاجل $k\neq 0$ المقدار $1+kp$ لايقسم مرتبة الزمرة G وبالتالي توجد $P-$ زمرة جزئية سيلوفية واحدة فقط مرتبتها p وهي K وهي ناظمية في G وبطريقة مشابهة نجد ايضاً ان H ناظمية في G ومنه $H.K$ زمرة جزئية في G وبما أن p,q اوليان فيما بينهما فإن $H\cap K=<e>$ ومنه $H\times K$ مجموع مباشر وايضاً

$$o(x.y)=o(x).o(y)=p.q$$

Syria Math Team

ومنه جداء زمرتين جزئيتين مراتبهما أولية فيما بينهما ⇐ زمرة دوارة.ومنه

$$G =< x.y >\cong Z_{p.q}$$

تمرين : لتكن G زمرة مرتبتها 60 و N زمرة جزئية ناظمية في G مرتبتها 2 أثبت أن

١) الزمرة G تحوي زمر جزئية ناظمية مراتبها 6,10,30.
٢) الزمرة G تحوي زمر جزئية ناظمية مراتبها 12.

الحل :

إن $(G:1) = 60 = 2^2.3.5$ إن G تحوي :

- $5-$ زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها 5 **ولتكن** K
- $3-$ زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها 3 **ولتكن** H
- $2-$ زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها 4 **ولتكن** M

- إن العدد ال $5-$ زمر جزئية سيلوفية التي مرتبة كل منها 5 تساوي $1+5K$.
عندما $K=0 \longleftarrow 1$ مقبول (يقسم المرتبة)
عندما $K=1 \longleftarrow 6$ مقبول (يقسم المرتبة)
عندما $K=2 \longleftarrow 11$ مرفوض (لا يقسم المرتبة)
عندما $K=3 \longleftarrow 16$ مرفوض (لا يقسم المرتبة)
عندما $K=4 \longleftarrow 21$ مرفوض (لا يقسم المرتبة)
عندما $K=5 \longleftarrow 26$ مرفوض (لا يقسم المرتبة)
عندما $K=6 \longleftarrow 30$ مرفوض (لا يقسم المرتبة)
ومنه لدينا 6 زمر مختلفة مرتبة كل منها 5 أي اصبح لدينا اكثر من 60 اذاً ال 6 مرفوض ومنه نجد أن لاجل $K \neq 0$ المقدر $1+5K$ لايقسم مرتبة G وأن G تحوي زمرة جزئية سيلوفية واحدة فقط مرتبتها 5 وهي K ومنه K ناظمية ودوارة .

- إن العدد ال $3-$ زمر جزئية سيلوفية التي مرتبة كل منها 3 تساوي $1+3K$.
عندما $K=0 \longleftarrow 1$ مقبول (يقسم المرتبة)
عندما $K=1 \longleftarrow 4$ مقبول (يقسم المرتبة)
عندما $K=2 \longleftarrow 7$ مقبول (يقسم المرتبة)
عندما $K=3 \longleftarrow 10$ مقبول (يقسم المرتبة)
عندما $K=4,5,7,6,,,$ مرفوض (لا يقسم المرتبة)
ومنه لدينا 10 زمر مختلفة مرتبة كل منها 3 اذاً وجدنا 10 زمر مرتبة كل منها 3 اصبح لدينا أكثر من 60 زمرة وهذا مرفوض .
ومنه نجد أن G تحوي $3-$ زمرة جزئية سيلوفية واحد فقط مرتبتها 3 وهي H وهي ناظمية ودوارة .

Syria Math Team

ولنوجد الزمر التي مرتبة كل منها 30 , 10 , 6

- $H \times N$ زمرة جزئية ناظمية في G مرتبتها 6.
- $K \times N$ زمرة جزئية ناظمية في G مرتبتها 10 .
- $K \times H \times N$ زمرة جزئية ناظمية في G مرتبتها 30 ..

$$K \times H \times N \cong Z_5 \oplus Z_3 \oplus Z_2 \cong Z_3$$
$$K \oplus H \cong K \times H$$

٢) إن M زمرة جزئية في G مرتبتها 4 وأن $M.H$ زمرة جزئية في G مرتبتها 12 .

انتهت المحاضرة

وبهذا نكون قد انتهينا من مقرر البنى الجبرية 1 نأمل ان نكون عند حسن ظنكم.

والآن سوف نورد اليكم بعض الأخطاء التي وردت في المحاضرات السابقة:

المحاضرة السادسة: صفحة(١): اول تعريف:

الخطأ: تعريف الزمرة.
الصح: تعريف العملية الثنائية.

المحاضرة الثامنة: صفحة(٥) ثاني سطر:

الخطأ: $aH = bH$
الصح: $aH = Hb$

ثالث سطر:

الخطأ: $aH = bH$ لان

الصح: $aH = bH$

المحاضرة العاشرة: صفحة (٢): سطر (٥):

الخطأ: $Z =< 5 > =< 3 >$
الصح: $Z_8 =< 5 > =< 3 >$

Syria Math Team

المحاضرة الثانية عشر الصفحة (٣) اول سطر:

الخطأ: $\frac{Z_{18}}{3}$

الصح: $\frac{Z_{18}}{H}$

سطر ٤ من الاخير:

الخطأ: $(G:H)=\frac{(G:H)}{(H:1)}$

الصح: $(G:H)=\frac{(G:1)}{(H:1)}$

الصفحة (٦): السطر الثاني:

الخطأ: $\bar{x}\in\bar{x}$

الصح: $\bar{x}\in\bar{k}$

كل تأخير في حياتك هو لحكمة بالغة يعلمها الله وحده

فسلم أمرك له وثق به ولا تيأس وتيقن إن الله

سيعوضك خيرا حتى تطيب نفسك

ملاحظة : نوه الدكتور أن أسئلة الامتحان لا تحوي أسئلة من خارج أفكار المقرر وتوزع العلامات بالشكل التالي

٢٥ علامة على بحث المجموعات .

٥٠ علامات بحث الزمر.

٢٥ أسئلة عملية .

إعداد: ناريمان جلو – ولاء الأخضر – هلا هج

Syria Math Team