تمرينات محلولة

<u>التمرين الأول</u> :

لتكن M زمرة جمعية تبديلية و لتكن $\left(End\,(M),+,\cdot\right)$ حلقة التــشاكلات الزمرية على M لنعرف على M قانون تشكيل خارجي $(\cdot)$ مجموعة مؤثراتــه الحلقة(M) End كما يلي :

$$(\cdot):\quad End(M)\times M\to M$$
$$(f,m)\,\alpha\;\; f\,m=f(m)$$

المطلوب :

I– إثبات أن M مودول على الحلقة $End\,(M)$.

II– بفرض R حلقة ما و $\mu:R\to End(M)$ تشاكل حلقي بحيث $\mu(1_R)=I_M$

أثبت أن M مودول بالنسبة إلى القانون التشكيل الخارجي :

$$(\cdot):\quad R\times M\to M$$
$$(\lambda,m)\,\alpha\;\; \lambda.m=[\mu(\lambda)](m)$$

الحل :

I– إن $(M,+)$ زمرة تبديلية فرضاً

أياً كان $x,y\in M$ و أياً كان $f,g\in End(M)$ فإن :

1. $I_M\,.x\;=I_M\,(x)\;=x$
2. $(f+g).x=(f+g)(x)\;=f(x)+g(x)$

$$3.\quad f.(x+y)=f(x+y)=f(x)+f(y)$$
$$=f.x+f.y$$
$$4.\quad f.(g.x)=f.(g(x))=f(g(x))$$
$$=(f\, o\, g)(x)$$
$$=(f.g)(x)$$
$$=(f.g).x$$

مما سبق نجد أن M مودول على الحلقة $End(M)$.

II- إن $(M,+)$ زمرة تبديلية فرضاً .

أياً كان $x,y\in M$ و أياً كان $\alpha,\beta\in R$ فإن :

$$1.\quad 1_R\cdot x=[\mu(1_R)](x)=I_M(x)=x$$
$$2.\quad (\alpha+\beta)\cdot x=[\mu(\alpha+\beta)](x)$$
$$=[\mu(\alpha)+\mu(\beta)](x)$$
$$=[\mu(\alpha)](x)+[\mu(\beta)](x)$$
$$=\alpha\cdot x+\beta\cdot x$$

$$3.\quad \alpha\cdot(x+y)=[\mu(\alpha)](x+y)$$
$$=[\mu(\alpha)](x)+[\mu(\alpha)](y)$$
$$=\alpha\cdot x+\beta\cdot y$$

$$4.\quad \alpha\cdot(\beta\cdot x)=\alpha\cdot([\mu(\beta)](x))$$
$$=[\mu(\alpha)]([\mu(\beta)](x))$$
$$=[\mu(\alpha).\mu(\beta)](x)$$
$$=[\mu(\alpha\cdot\beta)](x)$$
$$=(\alpha\cdot\beta)\cdot x$$

وهذا ما يثبت أن M مودول الحلقة R .

التمرين الثاني :

ليكن M مودولاً على حلقة R . نقول عن المودول M إنه بسيط (Simple) إذا كان M لا يحوي سوى المودولين الجزئين M و O .

وبعبارة مكافئة يكون المودول M بسيطاً إذا تحقق الشرط :

أياً كان N مودولاً جزئياً من المودول M فإن $N = O$ أو $N = M$.

برهن تكافؤ القضيتين :

I- المودول M بسيط .

II- أياً كان $o_M \neq x \in M$ فإن $M = R_x = \{\alpha . x \; ; \quad \alpha \in R\}$

الحل :

$(\mathrm{I} \Rightarrow \mathrm{II})$: أياً كان $o_M \neq x \in M$ فإن $\langle x \rangle = R_n \neq O$ مودولاً جزئياً من المودول M وبما أن M بسيط فإن $R_x = M$

$(\mathrm{II} \Rightarrow \mathrm{I})$: ليكن $N \neq O$ مودولاً جزئياً من M عندئذٍ $N \subseteq M$ ، ومن ثم أياً كان $o_M \neq x \in N$ فإن $\langle x \rangle \subseteq N$ ، لكن حسب (II) يكون $\langle x \rangle = M$ وبالتالي $M \subseteq N$ ومنه يكون $M = N$ أي أن المودول M بسيط .

التمرين الثالث :

ليكن M مودولاً على حلقة R . ولتكن X مجموعة جزئية غير خالية من M وليكن A مثالياً في R .

(1) – أثبت أن المجموعة AX مودول جزئي من المودول M .

(2) – أثبت أن المجموعة RX مودول جزئي من المودول M ، مولد بالمجموعة X .

الحل :

(1) – بما أن A مثالي في الحلقة R فإن AX زمرة جزئية من الزمرة

$(M,+)$ ، كما أنه أياً كان $\sum_{i=1}^{n} a_i.x_i. \in AX$ و أياً كان $\alpha \in R$ فإن

(لأن A مثالي في R) $$\alpha.\sum_{i=1}^{n} a_i.x_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha a_i) x_i \in AX$$

إذن AX مودول جزئي من M.

(2) – بما أن الحلقة R هي مثالي في R فحسب الطلب (1) يكون RX مودولاً جزئياً من M .وبما أن :

$$\forall x \in X: \quad x = 1_R.x \in RX$$

فإن $X \subseteq RX$.

إذا كان N مودولاً جزئياً من M ، يحوي X فإن

$$\forall x \in X, \quad \alpha \in R \quad : \quad \alpha x \in N$$

ومنه أياً كان $\sum_{i=1}^{n} a_i.x_i \in RX$ فإن $\sum_{i=1}^{n} a_i.x_i \in N$ ومنه $RX \subseteq N$

أي أن RX هو أصغر مودول جزئي من M يحوي X وهذا يعني أن $RX = \langle X \rangle$.

***<u>التمرين الرابع</u>* :**

ليكن M مودول منتهي التوليد على حلقة تبديلية R . ولنفرض أن I مثالياً في R بحيث $I \subseteq Rad\, R$.

أثبت أنه إذا كان $I.M = M$ فإن $M = O$.

الحل :

بما أن المودول M منتهي التوليد فإنه توجد مجموعة جزئية مثل $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ من M بحيث $M = \langle s \rangle$ و S عنصر أصغري في أسرة المجموعات التي تولد كل منها المودول M .

وعندئذٍ $x_n \in I\,M$ وبالتالي يوجد $a_1, a_2, ..., a_n \in I$ بحيث :

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} a_i . x_i$$

ومنه

$$(1_R - a_n)x_n = a_1 x_1 + ... + a_{n-1} . x_{n-1}$$

وبما أن $a_n \in Rad\, R$ فإن العنصر $(1_R - a_n)$ قلوب في الحلقة R ومنه

$$x_n \in \langle S_1 \rangle \subseteq M \quad ; \quad S_1 = \{x_1, x_2, ..., x_{n-1}\}$$

وبالتالي $M = \langle S_1 \rangle$ وهذا يناقض اختيار المجموعة S .

إذن $M = O$.

التمرين الأول :

لتكن G زمرة تبديلية منتهية وليكن $Card\,G = m$.

1- أثبت أنه أياً كان $n,t \in Z$ بحيث $n = t \pmod{m}$ فإن $ng = tg$

وذلك أياً كان $g \in G$.

2- أثبت أن G هي مودول على الحلقة Z/mZ بالنسبة إلى قـــانون التشكيل الخارجي $(\cdot)$:

$$(\cdot) \quad : \quad Z/mZ \times G \to G$$
$$\left(n/mZ \, , \, g\right) \alpha \;\; ng$$

التمرين الخامس :

لتكن R حلقة تبديلية وليكن M مودولاً على R . من أجل كل عنصر $r \in R$ نأخذ المجموعتين :

$$rM = \{rm \quad ; \quad m \in M\}$$
$$M_r = \{m \in M ; \quad rm = o\}$$

1- أثبت أن كلاً من M_r , rM مودول جزئي من المودول M.

2- إذا كان $R = Z$ حلقة الأعداد الصحيحة و $M = Z/nZ$ ، وإذا فرضنا أن $n = rs$ و s, r أوليان فيما بينهما (أوليان نسبياً) . فأثبت أن $rM = M_s$.

التمرين السادس :

لتكن A,B,C ثلاثة مودولات جزئية من مودول M على حلقة R بحيث

$$A \subseteq B \quad , \quad A+C=B+C \quad , \quad A \cap C = B \cap C$$

برهن أن $A=B$.

التمرين الأول

ليكن $f : M \longrightarrow N$ تشاكلاً مودولياً غير صفري .أثبت صحة الاقتضائين التاليين :

1- [التشاكل f متباين] $\Rightarrow$ [المودول M بسيط].

2- [التشاكل f غامر] $\Rightarrow$ [المودول N بسيط].

الحل :

1- إن $\ker f$ مودول جزئي من المودول M وبما أن المودول M بسيط فإن

$$\ker f = M \qquad \text{أو} \qquad \ker f = O$$

لكن التشاكل f ليس صفرياً وبالتالي $\ker f \neq M$. إذن $\ker f = O$ وهذا ما يثبت أن التشاكل f متباين .

2 – إن $\operatorname{Im} f$ مودول جزئي من المودول N وبما أن المودول N بسيط فإن

$$\operatorname{Im} f = N \qquad \text{أو} \qquad \operatorname{Im} f = O$$

لكن التشاكل f ليس صفرياً وبالتالي $\operatorname{Im} f \neq O$. إذن $\operatorname{Im} f = N$ وهذا ما يثبت أن التشاكل f غامر .

التمرين الثاني

ليكن $f : M \longrightarrow N$ تشاكلاً مودولياً وليكن A مودولاً جزئياً من B, ولـــيكن B مودولاً جزئياً من N . أثبت أن :

$$\overrightarrow{f}\left(A \cap \overleftarrow{f}(B)\right) = \overrightarrow{f}(A) \cap B$$

الحل :

$$
\begin{aligned}
z \in \overrightarrow{f}\left(A \cap \overleftarrow{f}(B)\right) &\Leftrightarrow z = f(x) \quad ; \quad x \in A \cap \overleftarrow{f}(B) \\
&\Leftrightarrow z = f(x) \quad ; \quad x \in A \wedge x \in \overleftarrow{f}(B) \\
&\Leftrightarrow z = f(x) \quad ; \quad f(x) \in \overrightarrow{f}(A) \wedge f(x) \in B \\
&\Leftrightarrow z \in \overrightarrow{f}(A) \wedge z \in B \\
&\Leftrightarrow z \in \overrightarrow{f}(A) \cap B
\end{aligned}
$$

التمرين الثالث

ليكن

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[d, "\gamma"] \\
A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C'
\end{tikzcd}$$

مخططاً تبادلياً من التشاكلات المودولية ،سطريه متتاليتين تامتين .

المطلوب :

1− إذا كانت التشاكلات α,γ,f' متباينة ، فأثبت أن التشاكل β متباين .

2− إذا كانت التشاكلات α,γ,g غامرة ، فأثبت أن التشاكل β غامر .

الحل

1− أياً كان $b \in \ker\beta$ فإن

$$\beta(b)=o......................(1)$$

وبالتالي $g'(\beta(b))=o$ وبما أن المخطط تبادلي ينتج أن $\gamma(g(b))=o$ لكن التشاكل χ متباين وبالتالي $g(b)=o$ ومنه $b\in\ker g$ وبمــا أن الــسطر العلوي متتالية تامة ينتج أن $b\in\operatorname{Im} f$ وبالتالي يوجد $a\in A$ بحيث $f(a)=b$

نبدل في العلاقة (1) فنحصل على أن $\beta(f(a))=o$ وبما أن المخطط تبادلي ، ينتج أن $f'(\alpha(a))=o$ وبما أن التشاكل f' متباين فإن $\alpha(a)=o$ كما أن التشاكل α متباين وبالتالي $a=o$ ومنه $b=f(o)=o$ وهذا ما يثبت أن التشاكل β متباين .

2- أياً كان $b'\in B'$ ، بما أن التشاكل γ غامر فإنه يوجد $c\in C$ بحيث يكون $\gamma(c)=g'(b')$ وبما أن التشاكل g غامر فإنه من أجل العنصر c يوجد $b\in B$ بحيث $g(b)=c$ ، وبالتالي يكون $g'(b')=\gamma(g(c))$ لكن $\gamma og=g'o\beta$ وبالتالي ينتج أن $g'(b')=g'(\beta(b))$ ومنه $b'-\beta(b)\in\ker g'$ ، وبما أن السطر السفلي متتالية تامة فإن $\ker g'=\operatorname{Im} f'$ وبالتالي يكون $b'-\beta(b)\in\operatorname{Im} f'$ ومنه يوجد $a'\in A'$ بحيث $b'-\beta(b)=f'(a')$ ، وبما أن التشاكل α غامر فإنه من أجل العنصر a' يوجد $a\in A$ بحيث $\alpha(a)=a'$ وبالتالي يكون $b'-\beta(b)=f'(\alpha(a))$ وبما أن المخطط تبادلي فإن $f'o\alpha=\beta of$ ومنه $b'-\beta(b)=\beta(f(a))$ وبالتالي $b'=\beta(f(a)+\beta(b))$ وهذا يثبت أن التشاكل β غامر .

التمرين الرابع

ليكن

$$\begin{tikzcd}
 & M & & \\
A \arrow[r, "f"'] & B \arrow[u, "v"'] \arrow[r, "g"'] & C \arrow[r] & O
\end{tikzcd}$$

مخططاً من التشاكلات المودولية ، سطره متتالية تامة وفيه $v \circ f = o$.

أثبت أنه يوجد تشاكل مودولي وحيد $h : C \longrightarrow M$ يجعل المخطط تبادلياً .

الحل

حسب المبرهنة (2−6) نجد أنه لإثبات المطلوب يكفي أن نثبت أن التشاكل g غامر وأن $\ker g \subseteq \ker v$.

إن التشاكل g غامر لأن السطر متتالية تامة .

بما أن السطر متتالية تامة فإن $\operatorname{Im} f = \ker g$ وبالتالي أياً كان $b \in \ker g$ فإن $b \in \operatorname{Im} f$ وبالتالي يوجد $a \in A$ بحيث $f(a) = b$. بما أن $v \circ f = o$ فإن $v(f(a)) = o$ ومن ثم $f(a) \in \ker v$ أي $b \in \ker v$ أي أن $\ker g \subseteq \ker v$.

وبذلك يتم المطلوب .

التمرين الأول :

لتكن R حلقة تبديلية وليكن $f : R\times R \longrightarrow R$ تطبيقاً .

أثبت أن f تشاكل مودولي عندما وفقط عندما يوجد $\alpha, \beta \in R$ بحيث

$$f(x,y) = \alpha.x + \beta.y \qquad (\forall x, y \in R)$$

التمرين الثاني

ليكن $f : A \longrightarrow B$ و $f' : A' \longrightarrow B'$ تشاكلين مودوليين ولنعـرف التطبيق

$$f\times f' : A\times A' \longrightarrow B\times B'$$
$$(f\times f')(a,a') = (f(a), f(a')) \qquad (\forall (a,a')\in A\times A')$$

1- أثبت أن $f\times f'$ تشاكل مودولي .

2- برهن أنه إذا كانت المتتاليتان :

$$O \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow O$$

$$O \longrightarrow A' \xrightarrow{f'} B' \xrightarrow{g'} C' \longrightarrow O$$

تامتين فإن المتتالية :

$$O \longrightarrow A\times A' \xrightarrow{f\times f'} B\times B' \xrightarrow{g\times g'} C\times C' \longrightarrow O$$

تكون تامة .

التمرين الثالث

ليكن

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[d, "\gamma"] \\ A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C' \end{tikzcd}$$

مخططاً تبادلياً من التشاكلات المودولية وفيه α, β, γ تماثلات مودولية أثبــت أنه يكون السطر العلوي متتالية تامة ، عندما يكون السطر السفلي متتالية تامة .

التمرين الرابع

ليكن

$$\begin{tikzcd} & & O \arrow[d] & & \\ & & A'_2 \arrow[d, "\tau_2"] \arrow[dr, "\alpha"] & & \\ O \arrow[r] & A'_1 \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\tau_1"] \arrow[dr, "\beta"'] & A \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d] & A''_1 \arrow[r] & O \\ & & A''_2 \arrow[ur, "g"'] \arrow[d] & & \\ & & O & & \end{tikzcd}$$

مخططاً تبادلياً من التشاكلات المودولية سطره وعموده متتاليتان تامتان والمطلوب :

1- أثبت أن α,β تشاكلان صفريان .

2- أثبت أن f,g تماثلان .

التمرين الخامس

ليكن

$$
\begin{tikzcd}
 & O \arrow[d] & O \arrow[d] & O \arrow[d] & \\
O \arrow[r] & A' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "f'"] & A \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "f"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & O \\
O \arrow[r] & B' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "g'"] & B \arrow[r] \arrow[d, "g"] & B'' \arrow[r] \arrow[d, "g''"] & O \\
O \arrow[r] & C' \arrow[d] & C \arrow[d] & C'' \arrow[r] \arrow[d] & O \\
 & O & O & O &
\end{tikzcd}
$$

مخططاً تبادلياً من التشاكلات المودولية أعمدته الثلاثة متتاليات تامة وسطراه العلويان متتاليتان تامتان .

Scanned by CamScanner

برهن أن يوجد تشاكلين وحدين :

$$\alpha'': C' \longrightarrow C \quad , \quad \beta'': \ C \longrightarrow C''$$

من أجلها يصبح السطر السفلي متتالية تامة ويجعل المخطط الناتج تبادلياً .

(إرشاد :لاحظ أن $g \circ \alpha \circ f' = 0$ وأيضاً $\ker g' = \operatorname{Im} f' \subseteq \ker(g \circ \alpha)$

ثم اعتمد على المبرهنة (2-6) لإثبات وجود α'' وكذلك β'') .

المثال الأول

نعلم أن كل زمرة جمعية تبديلية هي مودول على حلقة الأعـــداد الـــصحيحة Z وبالتالي Z هي مودول على Z ولنأخذ التشاكلين :

$$f : Z \longrightarrow Z$$

$$f(z) = 2z \qquad (\forall z \in Z)$$

$$I_Z : Z \longrightarrow Z$$ (المطابق في Z)

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "I_Z"] \arrow[d, "f"'] & Z \\
Z \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

فحسب المبرهنة (2–4) يوجد تطبيق $h : Z \longrightarrow Z$ بحيث يكون $h \circ f = I_Z$.

لكن التطبيق h لا يمكن أن يكون تشاكلاً مودولياً ، لأنه إذا كـان h تـشاكلاً مودولياً فإن :

$$\begin{aligned}
(\forall z \in Z) \quad : \quad (h \circ f)(z) &= I_Z(z) \\
\Rightarrow \quad h(f(z)) &= z \\
\Rightarrow \quad h(2z) &= z \\
\Rightarrow \quad 2h(z) &= z
\end{aligned}$$

وفي حالة خاصة يجب أن يكون $2h(1) = 1$ وهذا مستحيل لأن المعادلة $2x = 1$ مستحيلة في Z .

<u>المثال الثاني</u>

ليكن p عدداً أولياً ولنأخذ المجموعة :

$$Q_P = \left\{ x = {}^{k}\!/_{p^n} \quad ; \; k \in Z \; , \; n \in N \right\} \subseteq Q$$

فنجد بسهولة أن Q_P زمرة جزئية من الزمرة $(Q,+)$ كما أن Z زمرة جزئيـة من الزمرة الجزئية Q_P. ولنأخذ التشاكلين :

$$f : {}^{Q_P}\!/_{Z} \longrightarrow {}^{Q_P}\!/_{Z}$$

$$f(x) = px \qquad \left(\forall x \in {}^{Q_P}\!/_{Z} \right)$$

$$I : {}^{Q_P}\!/_{Z} \longrightarrow {}^{Q_P}\!/_{Z}$$

حيث أن الزمرة Q_P/Z هي مودول على Z .

$$\begin{tikzcd} & Q_p/Z \arrow[dl, dotted, "h"'] \arrow[d, "I"] \\ Q_p/Z \arrow[r] & Q_p/Z \end{tikzcd}$$

أياً كان $n \in N$ و $k \in Z$ فإن $kP^{-n}/Z = P\left(kP^{-n-1}/Z\right)$ وبالتالي

$$\operatorname{Im} f = Q_P/Z = \operatorname{Im} I$$

فالقضية "(2) من المبرهنة (2-5) محققة وبالتالي حسب المبرهنـــة المـــذكورة يوجد تطبيق $h : Q_P/Z \longrightarrow Q_P/Z$ بحيث يكون $f \circ h = I$.

إن التطبيق h لا يمكن أن يكون تشاكلاً مودولياً ، لأنـــه إذا كـــان h تـــشكلاً مودولياً فإن :

$$P^{-1}/Z = f\left(h\left(P^{-1}/Z\right)\right) = P\left(h\left(P^{-1}/Z\right)\right) = h\left(P\left(P^{-1}/Z\right)\right)$$
$$= h\left(O/Z\right) = O/Z$$

وهذا مستحيل .

التمرين الأول

ليكن A مودولاً جزئياً من مودول M على حلقة R . أثبت أنه يوجد تشاكل مودولي غامر نواته A .

الحل

لنأخذ العلاقة :

$$f : M \longrightarrow M/A$$

$$f(x) = x + A$$

فنجد أن العلاقة f تطبيق لأنه إذا كان $x = y$ (حيث $x, y \in M$ فإن $x + A = y + A$ وبالتالي $f(x) = f(y)$. كما أن التطبيق f غامر لأنه أياً كان $x + A \in M/A$ فإنه يوجد $x \in M$ من أجله يكون $f(x) = x + A$. كما أن f تشاكل مودولي وذلك لأن :

1-
$$\begin{aligned} f(x+y) &= (x+y) + A \\ &= (x+A) + (y+A) \\ &= f(x) + f(y) \end{aligned}$$

2-
$$\begin{aligned} f(\alpha.x) &= \alpha.x + A \\ &= \alpha.(x+A) \\ &= \alpha.f(x) \end{aligned}$$

وأخيراً أياً كان $x \in \ker f$ فإن

$$f(x) = A \quad \Rightarrow \quad x + A = A \quad \Rightarrow \quad x \in A$$

أي $\ker f \subseteq A$.

وبالعكس إذا كان $x \in A$ فإن $x + A = A$ أي $f(x) = A$.

ومنه $x \in \ker f$ أي $A \subseteq \ker f$. إذن $\ker f = A$.

التمرين الثاني :

ليكن $f : M \longrightarrow N$ تشاكلاً مودولياً ، وليكن A,B مودولين جزئيين من المودولين M,N على الترتيب .

المطلوب

أولاً : أثبت أن القضيتين التاليتين متكافئتان:

I- $\vec{f}(A) \subseteq B$

II- يوجد تشاكل مودولي وحيد $h : M/_{A} \longrightarrow N/_{B}$ بحيث يجعل المخطط

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_A"'] & N \arrow[d, "\pi_B"] \\
M/A \arrow[r, dotted, "h"'] & N/B
\end{tikzcd}$$

تبادلياً

ثانياً : في حالة وجود التشاكل h أثبت أن

(a) . h متباين $\Leftrightarrow$ $A = \breve{f}(B)$

(b) . h غامر $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Im} f + B = N$

الحل

أولاً : لنتأمل المخطط

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\pi_B \circ f} & N/B \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_A} & & \\ M/A & & \end{array}$$

فنجد أن القضية (II) تكافئ القضية $\ker \pi_A \subseteq \ker(\pi_B \circ f)$ (وذلك حسب المبرهنة $(2-6)$) ، كما أن :

$$(\forall x \in M) \qquad x \in \ker \pi_A \Leftrightarrow x + A = o + A \Leftrightarrow x \in A$$

وبشكل مشابه نجد أن

$$x \in \ker(\pi_B \circ f) \Leftrightarrow f(x) + B = o + B \Leftrightarrow f(x) \in B$$

وبالتالي القضية (II) تكافئ القضية $\overset{\mu}{f}(A) \subseteq B$.

ثانياً :

(a) . إن

$$\begin{aligned} \ker h &= \{x + A \quad ; \quad f(x) \in B\} \\ &= \{x + A \quad ; \quad x \in \overset{\sigma}{f}(B)\} = \overset{\sigma}{f}(B)/A \end{aligned}$$

وبذلك يكون لدينا :

$$h \text{ متباين } \Leftrightarrow \ker h = o + B$$

وبعبارة مكافئة :

$$h \text{ متباين } \Leftrightarrow \breve{f}(B) = A$$

(b) . إن :

$$\operatorname{Im} h = \{ f(x) + B \quad ; \quad x \in M \}$$

وبالتالي :

$$h \text{ غامر } \Leftrightarrow [(\forall n \in N)(\exists x \in M): \quad n + B = f(x) + B]$$

$$\Leftrightarrow [(\forall n \in N)(\exists x \in M): \quad n - f(x) \in B]$$

$$\Leftrightarrow [\operatorname{Im} f + B = N]$$

التمرين الثالث

إذا كان $f : M \longrightarrow N$ تشاكلاً مودولياً ، فأثبت وجود تماثل وحيد $h : M/\ker f \longrightarrow \operatorname{Im} f$ بحيث يجعل المخطط :

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f^+"] \arrow[d, "\pi"'] & \operatorname{Im} f \\
M/\ker f \arrow[ur, dotted, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

تبادلياً .

حيث

$$f^+ : M \longrightarrow \operatorname{Im} f$$
$$f^+(x) = f(x)$$

الحل:

جسب مبرهنة التماثل الأولى إن التطبيق

$$h : M/\ker f \longrightarrow \operatorname{Im} f$$

$$h(x + \ker f) = f(x)$$

تماثل مودولي .

$$M/\ker f \cong \operatorname{Im} f$$

زد على ذلك إن h يجعل المخطط السابق تبادلياً لأنه أياً كان $x \in M$ فإن :

$$\begin{aligned}(h o \pi)(x) &= h(\pi(x)) \\ &= h(x + \ker f) \\ &= f(x)\end{aligned}$$

أي أن $h o \pi = f$.

لنبرهن أخيراً أن التماثل h هو الوحيد الذي يجعل المخطط تبادلياً .

لنفرض أنه يوجد تماثل آخر $k : M/\ker \longrightarrow \operatorname{Im} f$ بحيث $k o \pi = f$ وبالتالي يكون $h o \pi = k o \pi$ ، وبما أن التشاكل π غامر فهو قابل للاختصار من اليمين وبالتالي ينتج $h = k$.

<u>التمرين الرابع</u>

ليكن A, B مودولين جزئيين من مودول M على حلقة R . أثبت أن :

$$(A + B)/B \cong A/A \cap B$$

الحل:

لنأخذ العلاقة :

$$f : A \longrightarrow (A + B)/B$$

المعرفة كما يلي :

$$f(x) = x + B \quad ; \quad (\forall x \in A)$$

فنجد أن f تطبيق لأن :

$$(\forall x, y \in A): \quad x = y \Rightarrow x + B = y + B \Rightarrow f(x) = f(y)$$

كما أن التطبيق f تشاكل مودولي لأن :

$$1) \quad \begin{aligned} f(x+y) &= (x+y) + B \\ &= (x+B) + (y+B) \\ &= f(x) + f(y) \end{aligned}$$

$$2) \quad \begin{aligned} f(\alpha.x) &= (\alpha.x) + B \\ &= \alpha.(x+B) \\ &= \alpha.f(x) \end{aligned}$$

وذلك أياً كان $x, y \in A$ و أياً كان $\alpha \in R$.

كما أن التشاكل f غامر لأنه أياً كان $z \in {}^{(A+B)}\!/_{B}$ فإن

$t = a + b \quad ; \quad z = t + B$ أي أن

$$z = (a+b) + B = (a+B) + (b+B) \quad ; \quad a \in A, b \in B$$

$$= a + B \quad ; \quad a \in A$$

أي أنه أياً كان $z \in {}^{(A+B)}\!/_{B}$ يوجد $a \in A$ بحيث $f(a) = a + B = z$

وهذا يثبت أن f غامر .

لنثبت الآن أن $\ker f = A \cap B$. أياً كان $x \in \ker f$ فإن :

$$f(x) = B \Rightarrow \quad x + B = B \Rightarrow \quad x \in B$$

ومنه $\ker f \subseteq B$ ، لكن $\ker f \subseteq A$ ، وبالتالي ينتج $\ker f \subseteq A \cap B$.

من جهة أخرى ، أياً كان $u \in A \cap B$ فإن $u \in A$ و $u \in B$ ويكون

$$f(u) = u + B = B \Rightarrow \quad u \in \ker f$$

ومنه $A \cap B \subseteq \ker f$. إذن $\ker f = A \cap B$.

وبتطبيق مبرهنة التماثل الأولى ينتج

$$(A+B)/B \cong A/A \cap B$$

التمرين الأول :

لتكن R حلقة تبديلية ولنأخذ التطبيق :

$$f : R^3 \longrightarrow R^2$$

$$f(x,y,z)=(x,y) \qquad (\ \forall (x,y,z)\in R^3\ )$$

المطلوب :

1 – أثبت أن f تشاكل مودولي غامر .

2 – بفرض أن :

$$D=\{\ (0,0,z) \quad ; \quad z\in R \ \}\subseteq R^3$$

أثبت أن D مودول جزئي من المودول R^3 وأن $R^2 \cong R^3/D$.

التمرين الثاني :

ليكن $f : M \longrightarrow N$ تشاكلاً مودولياً . نرمز مرافق نواة التشاكل f بالرمز $co\ker f$ ونعرفها بأنها المودول $N/\operatorname{Im} f$ ، ولنأخذ الغمر القانوني :

$$\pi : N \longrightarrow co\ker f$$

والتباين القانوني :

$$J : \ker f \longrightarrow M$$

المطلوب إثبات صحة القضيتين الآتيتين :

1 – إذا كان التشاكل f متبايناً فإن $N \cong \ker \pi$.

2 – إذا كان التشاكل f غامراً فإن $N \cong co\ker J$.

$M = M_1 \oplus M_2$

التمرين الأول :

ليكن M_1, M_2 مودولين متكاملين في مودولٍ M على حلقة R .

أثبت أن :

$$M_2 \cong M/M_1$$

الحل :

بما أن $M = M_1 \oplus M_2$ فإن كل عنصر $m \in M$ يكتب بالشكل الوحيد :

$$m = m_1 + m_2 \quad ; \quad m_1 \in M_1 , \quad m_2 \in M_2$$

لنأخذ الإسقاط القانوني :

$$\Pr_2 : M \longrightarrow M_2$$
$$\Pr_2(m = m_1 + m_2) = m_2$$

من الواضح أن $\Pr_2$ تشاكل غامر نواته $\ker \Pr_2 = M_1$ وحسب مبرهنة التماثل الأولى يكون :

$$M/M_1 \cong M_2$$

التمرين الرابع :

ليكن P مودولاً على الحلقة R ولتكن $(M_i)_{i\in I}$ أسرة مودولات على الحلقة R . أثبت أن $P \cong \prod_{i\in I} M_i$ عندما وفقط ، عندما توجد أسرة من التـــشاكلات المودولية $\left(f_i : P \longrightarrow M_i\right)_{i\in I}$ بحيث يكون من أجل كل مودول M علـــى الحلقة R وكل أسرة من التشاكلات $\left(g_i : M \longrightarrow M_i\right)_{i\in I}$ يوجد تشاكل وحيد $h : M \longrightarrow P$ يجعل المخطط :

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "g_i"] \\
P \arrow[r, "f_i"'] & M_i
\end{tikzcd}$$

تبادليـــــاً .

الحل :

أولاً : لنفرض أن $P \cong \prod_{i\in I} M_i$. عندئذٍ توجد أســـرة التـــشاكلات الإســـقاطات القانونية $(pr_i)_{i\in I}$ بحيث من أجل أي مودول M على الحلقة R وكل أسرة من التشاكلات $(g_i : M \longrightarrow M_i)_{i\in I}$

يوجد تشاكل وحيد : $h : M \longrightarrow P$ يجعل المخطط :

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "g_i"] \\
\prod_{i\in I} M_i \arrow[r, "\mathrm{Pr}_i"'] & M_i
\end{tikzcd}$$

تبادليـــــاً . (لأن ($(pr_i)_{i\in I}$, $\prod_{i\in I} M_i$) جداء للأسرة $(M_i)_{i\in I}$) .

ثانياً : لتكن $(f_i : P \longrightarrow M_i)_{i\in I}$ أسرة تشاكلات مودولية بحيث يكون من أجل كل مودول M على الحلقة R وكل أسرة من التشاكلات $(g_i : M \longrightarrow M_i)_{i\in I}$ يوجد تشاكل وحيد $h : M \longrightarrow P$ يجعل المخطط :

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "g_i"] \\ P \arrow[r, "f_i"'] & M_i \end{tikzcd}$$

تبادليـــــاً . أي :

$$f_i \circ h = g_i \quad ; \quad \forall i \in I$$

ولنبرهن على أن $P \cong \prod_{i\in I} M_i$.

إذا أخذنا $M = \prod_{i\in I} M_i$ و $g_i = pr_i$ نحصل على المخطط التبادلي :

$$\begin{tikzcd} & \prod_{i\in I} M_i \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "\mathrm{Pr}_i"] \\ P \arrow[r, "f_i"'] & M_i \end{tikzcd}$$

ومنه :

$$f_i \circ h = pr_i \quad ; \quad \forall i \in I$$

ومن ناحية أخرى وبما أن $\left(\prod_{i\in I} M_i \ , \ (pr_i)_{i\in I} \right)$ جداء للأســرة $(M_i)_{i\in I}$

فإنه من أجل المودول P يوجد تشاكل مــودولي وحيــد $k : P \longrightarrow \prod_{i\in I} M_i$

يجعل المخطط :

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[dl, "k"'] \arrow[d, "f_i"] \\
\prod_{i\in I} M_i \arrow[r, "\mathrm{Pr}_i"'] & M_i
\end{tikzcd}$$

تبادليـــــــاً . أي :

$$pr_i \circ k = f_i \quad ; \quad \forall i \in I$$

وبالتالي :

$$pr_i \circ k \circ h = pr_i \quad ; \quad \forall i \in I$$

$$f_i \circ h \circ k = f_i \quad ; \quad \forall i \in I$$

ومنه :

$$k \circ h = I_{\prod_{i\in I} M_i} \quad and \quad h \circ k = I_P$$

وهذا يثبت أن h تماثل مودولي . أي أن $P \cong \prod_{i\in I} M_i$.

التمرين الخامس :

ليكن C مودولاً على حلقة R ، وليكن $(M_i)_{i\in I}$ أسرة مودولات على الحلقة R

أثبت أن $C = \bigoplus_{i\in I} M$ عندما وفقط ،عندما توجد أسرة من التشاكلات المودولية

أسـرة مـن التـشاكلات $\left(f_i : M_i \longrightarrow C\right)_{i\in I}$ بحيث يكون من أجل كل مودول M على الحلقة R وكل أسـرة مـن التـشاكلات $\left(g_i : M_i \longrightarrow M\right)_{i\in I}$ يوجـد تـشاكل وحيـد $h : C \longrightarrow M$ يجعل المخطط :

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "f_i"'] & M \\ C \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

تبادليـــــاً .

الحل :

أولاً : لنفرض أن $C \cong \bigoplus_{i\in I} M$. عندئذٍ توجد أسرة تشاكلات التباينات القانونيـة $(in_i)_{i\in I}$ بحيث من أجل أي مودول M على الحلقـة R وكـل أسـرة مـن التشاكلات $\left(g_i : M_i \longrightarrow M\right)_{i\in I}$ يوجد تشاكل وحيد $h : C \longrightarrow M$ يجعل المخطط :

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "in_i"'] & M \\ \bigoplus_{i\in I} M_i \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

تبادليـــــــاً .

(لأن ($(in_i)_{i\in I}$ ، $\bigoplus\limits_{i\in I} M_i$) جداء مرافق للأسرة $(M_i)_{i\in I}$) .

ثانياً : لتكن $(f_i : C \longrightarrow M_i)_{i\in I}$ أسرة تشاكلات مودولية بحيث يكون من أجل كل مودول M على الحلقة R وكل أسرة من التشاكلات $(g_i : M_i \longrightarrow M)_{i\in I}$ يوجد تشاكل وحيد $h : C \longrightarrow M$ يجعل المخطط :

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "f_i"'] & M \\ C \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

تبادلياً . أي

$$h \circ f_i = g_i \qquad \forall i \in I$$

ولنبرهن على أن $C \cong \bigoplus\limits_{i\in I} M_i$.

إذا أخذنا $M = \bigoplus\limits_{i\in I} M_i$ و $g_i = in_i$ فنحصل على المخطط التبادلي :

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "in_i"] \arrow[d, "f_i"'] & \bigoplus\limits_{i\in I} M_i \\ C \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

ومنه

$$h \circ f_i = in_i \qquad \forall i \in I$$

ومن جهة أخرى ، وبما أن $\left(\bigoplus_{i\in I} M_i \,,\, (in_i)_{i\in I}\right)$ جداء مرافق للأسرة $(M_i)_{i\in I}$ فإنه من أجل المودول C يوجد تشاكل مودولي وحيد $k: \bigoplus_{i\in I} M_i \to C$ يجعل المخطط

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "in_i"'] & C \\ \bigoplus_{i\in I} M_i \arrow[ur, "k"'] & \end{tikzcd}$$

تبادلياً . أي

$$k \circ in_i = f_i \qquad ; \qquad \forall i \in I$$

وبالتالي :

$$k \circ h \circ f_i = f_i \qquad ; \qquad \forall i \in I$$
$$h \circ k \circ in_i = in_i \qquad ; \qquad \forall i \in I$$

ومنه :

$$k \circ h = I_C \qquad and \qquad h \circ k = I_{\bigoplus_{i\in I} M_i}$$

وهذا ما يثبت أن h تماثل مودولي أي أن $C \cong \bigoplus_{i\in I} M$

التمرين السادس :

ليكن M مودولاً على حلقة R ،ولتكن $(M_j)_{j\in I}$ أسرة مودولات على الحلقة R ولتكن $\left(J_i , M_i \longrightarrow M\right)_{i\in I}$ أسرة تشاكلات . أثبت أن $\left(M , (J_i)_{i\in I}\right)$ جداء

مرافق للأسرة $(M_i)_{i\in I}$ عنـــدما وفقـــط ، عنـــدما توجـــد أســـرة تـــشاكلات $(\pi_i : M \longrightarrow M_i)$ بحيث :

$$(1) \cdot \quad \pi_k \circ J_i = \begin{cases} I_M & if \quad k = i \; ; \\ 0 & if \quad k \neq i \; . \end{cases}$$

(2) . أياً كان $m \in M$ فإن $\pi_i(m) = o$ من أجل جميع i دون عدد منته منها وإن $\sum_{i\in I}(J_i \circ \pi_i)(m) = m$

الحل

أولاً : لنفرض أن $(M,(J_i)_{i\in I})$ جداء مرافق للأسرة $(M_i)_{i\in I}$ عندئـــذٍ حـــسب المبرهنتين (4–6) و (4–5) يوجد تشاكل $h : \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow M$ يجعل المخطط

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "J_i"] \arrow[d, "in_i"'] & M \\ \bigoplus_{i\in I} M_i \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

تبادلياً .

من أجل كل $i \in I$ لنأخذ التطبيق :

$$\pi_i : M \longrightarrow M_i$$
$$\pi_i = \mathrm{Pr}_i^{\oplus} \circ h^{-1}$$

حيـــــث $\mathrm{Pr}_i^{\oplus} : \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow M_i$ مقـــــصور الإســـــقاط القـــــانوني $\mathrm{Pr}_i : \prod_{i\in I} M_i \longrightarrow M_i$ على المودول $\bigoplus_{i\in I} M_i$. عندئذٍ من أجل كـــل $i,k \in I$ يكون :

$$\pi_k \circ J_i = \Pr_k^{\oplus} \circ h \circ J_i = \Pr_k^{\oplus} \circ in_i = \begin{cases} I_{M_i} & k = i \\ 0 \quad if & k \neq i \end{cases}$$

كما أن من أجل كل $m \in M$ يكـون $\pi_i(m) = \Pr_i^{\oplus}\left(h^{-1}(m)\right)$ وأن $_i(m) = o$ من أجل جميع i باستثناء عدد منته منها . ويكون :

$$\sum_{i\in I}(J_i \circ \pi_i)(m) = \sum_{i\in I}\left(h \circ in_i \circ \Pr_i^{\oplus} \circ h^{-1}\right)(m)$$

$$= h \circ \left(\sum_{i\in I}\left(in_i \circ \Pr_i^{\oplus} \circ h^{-1}\right)\right)(m)$$

$$= m$$

وذلك بملاحظة أن $\sum_{i\in I}\left(in_i \circ \Pr_i^{\oplus}\right)$ هو المطابق على $\bigoplus_{i\in I} M_i$.

ثانياً:

لنفرض الآن أن القضيتين (1) و (2) محققتان . عندئذٍ حسب (2) تكون القضية

$$g(m) = \sum_{i\in I}(in_i \circ \pi_i)(m)$$

محققة من أجل أي تشاكل $g : M \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} M_i$ ، و حسب المبرهنــة (4-6) يوجد تشاكل مودولي $h : \bigoplus_{i\in I} M \longrightarrow M$ من أجله يكون :

$$h \circ in_i = J_i \qquad ; \qquad \forall i \in I$$

لنتأمل المخطط :

$$\begin{tikzcd}
M_i \arrow[r, shift left, "J_i"] \arrow[d, "in_i"'] & M \arrow[l, shift left, "\pi_i"] \arrow[dl, shift right, "g"'] \\
\bigoplus_{i\in I} M_i \arrow[ur, shift right, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

فنجد أن من أجل كل $m \in M$ يكون :

$$h(g(m)) = \sum (h \circ in_i \circ \pi_i)(m)$$

$$= \sum_{i \in I} (j_i \circ \pi_i)(m)$$

$$= m$$

أي أن $h \circ g = I_M$.

كما أنه أياً كان $x \in \underset{i \in I}{\oplus} M_i$ يكون $\sum_{i \in I} (in_i \circ pr_i^{\oplus})(x) = x$ وبالتالي :

$$g(h(x)) = \sum_{i \in I} (in_i \circ \pi_i)(h(x))$$

$$= \sum_{i \in I} \sum_{k \in I} (in_i \circ \pi_i \circ h \circ in_k \circ pr_k^{\oplus})(x)$$

$$= \sum_{i \in I} (in_i \circ pr_i^{\oplus})(x)$$

$$= x$$

وهذا ما يبين أن $g \circ h$ هو التطبيق المطابق في $\underset{i \in I}{\oplus} M_i$ ، وبالتالي $g \circ h$ تماثل وتطبيق المبرهنة (4−5) نجد أن $(M,(J_i)_{i \in I})$ جداء مرافق للأسرة $(M_i)_{i \in I}$.

التمرين الأول :

لتكن $(M_i)_{i=1,\dots\dots,n}$ أسرة منتهية من المودولات الجزئية من مودولٍ M على حلقة R ، وليكن $M=\bigoplus_{i\in I}^{n} M_i$ و ليكن N_k مودولاً جزئياً من M_k

$k=1,2,\dots,n$ وليكن $N=\sum_{i=1}^{n} N_i$

أثبت أن :

$$(1).\qquad N=\bigoplus_{i=1}^{n} N_i$$

$$(2).\qquad M/N\cong\bigoplus_{i=1}^{n}(M_i/N_i)$$

التمرين الثاني :

ليكن M مودولاً على حلقة R ، ولتكن $(M_i)_{i\in I}$ أسرة مودولات على الحلقة R ولتكن $(\pi_i : M\longrightarrow M_i)_{i\in I}$ أسرة تشاكلات مودولية .

أثبت أن $(M,(\pi_i)_{i\in I})$ جداء للأسرة $(M_i)_{i\in I}$ عندما وفقط ، عندما توجد أسرة تشاكلات $(J_i : M_i\longrightarrow M)_{i\in I}$ بحيث :

(1) .

$$\pi_k \circ J_i=\begin{cases} I_M & if \quad k=i\\ 0 & if \quad k\neq i\end{cases}$$

(2) . أياً كان $\prod_{i\in I} M_i \ni (x_i)_{i\in I}$ يوجد عنصر وحيد $x\in M$ بحيث :

$$\pi_i(x)=x_i \qquad \forall i\in I$$

التمرين الأول

ليكن M مودولاً على حلقة تبديلية R . أثبت تكافؤ القضيتين الآتيتين

I – المودول M منتهي التوليد .

II– يوجد تشاكل غامر $f : R^n \longrightarrow M$ (حيث n عدد صحيح موجب)

الحل :

(II $\Rightarrow$ I) لنفرض أن المودول M مولد بالمجموعة $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$

ولنأخذ العلاقة :

$$f : R^n \longrightarrow M$$

المعرفة كما يلي :

$$f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

فنجد أن العلاقة f تطبيق لأنه

يا كان $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ و $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ من R^n بحيث

$(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ فإن $\alpha_i = \beta_i (\forall i = 1,2, ..., n)$

وبالتالي $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$ أي أن

$$f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = f(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$$

كما أن التطبيق f تشاكل مودولي لأنه

أياً كان $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ ، $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ من R^n و أياً كان $\lambda \in R$

فإن :

$$f((\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)+(\beta_1,\beta_2,\ldots+\beta_n)=f(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\ldots,\alpha_n+\beta_n)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i+\beta_i)v_i$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.v_i+\sum_{i=1}^{n}\beta._i v_i$$
$$=f(\alpha_1,\alpha_2,\ldots\ldots,\alpha_n)+f(\beta_1,\beta_2,\ldots\ldots,\beta_n)$$

وأن

$$f(\lambda(\alpha_1,\alpha_2,\ldots\ldots,\alpha_n))=f(\lambda\alpha_1,\lambda\alpha_2,\ldots\ldots\ldots,\lambda\alpha_n)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\lambda\alpha_i v_i$$
$$=\lambda\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i$$
$$=\lambda f(\alpha_1,\alpha_2,\ldots\ldots\ldots\ldots,\alpha_n)$$

كما أن التشاكل f غامر لأنه : أياً كان $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.v_i$ من M فإن $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots\ldots\ldots,\alpha_n)\in R$ ويكون $f(\alpha_1,\alpha_2,\ldots\ldots\ldots,\alpha_n)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.v_i$. إذن f تشاكل مودولي غامر .

$(\mathrm{II}\Rightarrow\mathrm{I})$: لنفرض أن $f:R^n\longrightarrow M$ تشاكل مودولي غامر . وبما أن المودول R^n حر يقبل $\{e_1,e_2,\ldots\ldots,e_n\}$ قاعدة له فإنه أياً كان $m\in M$ يوجد $x\in R^n$ (لأن f غامر) بحيث $m=f(x)$ وبما أن $\{e_1,e_2,\ldots\ldots,e_n\}$ قاعدة للمودول R^n فإن

$$x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i \quad ; \quad \alpha_i\in R$$

وبالتالي $m=f(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i)$ وبما أن f تشاكل مودولي ينتج أن $m=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(e_i)$ وهذا ما يثبت أن المجموعة $\{f(e_1),f(e_2),\ldots\ldots,f(e_n)\}$

مولدة للمودول M . أي أن المودول M منتهي التوليد .

التمرين الثاني

ليكن M,N مودولين على حلقة R وليكن N حراً قاعدته $\{y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n\}$ وليكن $f: M \longrightarrow N$ تشاكلاً مودولياً غامراً . أثبت أنه يوجد مودول جزئي حر M_1 من M بحيث $M \cong M_1 \oplus \ker f$

الحل

بما أن التشاكل f غامر فإنه من أجل $\{y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n\}$ توجد $\{x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n\}$ من M بحيث

$$f(x_i) = y_i \qquad i = 1,2,\ldots\ldots\ldots, n$$

إن المجموعة $\{x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n\}$ حرة لأنه إذا كان $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = o$ (حيث $\alpha_i = R$) فإن $f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i) = o$ وبما أن f تشاكل مودولي ينتج أن $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i) = o$ وبالتالي $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i = o$ وبما أن $\{y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n\}$ حرة فإن

$$\alpha_i = o \qquad \forall i = 1,2,\ldots., n$$

وبالتالي المودول $M_1 = \langle x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n \rangle$ مودولاً جزئياً حراً من M . ولنثبت أن $M = M_1 \oplus \ker f$ ، لذلك يكفي أن نثبت القضيتين

$$(1) \qquad M = M_1 + \ker f$$

$$(2) \qquad M_1 \cap \ker f = O$$

من أجل (1) أياً كان $x \in M$ فإن $f(x) \in N$ وبالتالي

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i y_i \quad ; \quad \beta_i \in R$$

ومنــــــه $f(x)-\sum_{i=1}^{n}\beta_i y_i = o$ وبمـــــا أن f غـــــامر ينــــتج أن $f(x)-\sum_{i=1}^{n}\beta_i f(x_i) = o$ أي $f(x-\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i) = 0$ ومنه $x-\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i \in \ker f$

وبملاحظة أن

$$x \in M \quad , \quad \sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i \in M_1$$

ينتج أن $M = M_1 + \ker f$.

من أجل (2) : أياً كان $a \in M_1 \cap \ker f$ فإن

$$a \in M_1 \quad , \quad a \in \ker f$$

وبالتالي

$$a = \sum_{i=1}^{n}\gamma_i x_i \quad , \quad f(a) = o \qquad \gamma_i \in R$$

وبالتالي $f(\sum_{i=1}^{n}\gamma_i x_i) = o$ ، أي $\sum_{i=1}^{n}\gamma_i f(x_i) = o$ ومن ثم $\sum_{i=1}^{n}\gamma_i y_i = o$ وكون المجموعة $\{y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n\}$ حـــرة فـــإن $(\forall i = 1,2,\ldots\ldots,n)\gamma_i = o$ وبالتـــالي $a = o$. إذن $M_1 \cap \ker f = O$. وذلك يتم المطلوب .

التمرين الثاني :

لتكن M,N مودولين حرين وليكن $f : M \longrightarrow N$ تشاكلاً مودولياً ، برهن أن القضيتين التاليتين متكافئتان :

I – التشاكل f تماثل .

II– إذا كانت $(a_i)_{i\in I}$ قاعدة للمودول M فإن $(f(a_i))_{i\in I}$ قاعدة للمودول N .