

تمرينات محلولة

التمرين الأول :

لتكن M زمرة جمعية تبديلية و لتكن $(\text{End}(M), +, \cdot)$ حلقة التمشاكلات الزمرية على M لنعرف على M قانون تشكيل خارجي (\cdot) مجموعة مؤثراته الحلقة $\text{End}(M)$ كما يلي :

$$\begin{aligned} (\cdot) : \quad \text{End}(M) \times M &\rightarrow M \\ (f, m) \alpha \quad f m &= f(m) \end{aligned}$$

المطلوب :

I- إثبات أن M مودول على الحلقة $\text{End}(M)$.

II- بفرض R حلقة ما و $\mu: R \rightarrow \text{End}(M)$ تشاكل حلقي بحيث $\mu(1_R) = I_M$ أثبت أن M مودول بالنسبة إلى القانون التشكيل الخارجي :

$$\begin{aligned} (\cdot) : \quad R \times M &\rightarrow M \\ (\lambda, m) \alpha \quad \lambda.m &= [\mu(\lambda)](m) \end{aligned}$$

الحل :

I- إن $(M, +)$ زمرة تبديلية فرضاً

أيأ كان $x, y \in M$ و أيأ كان $f, g \in \text{End}(M)$ فإن :

1. $I_M \cdot x = I_M(x) = x$
2. $(f + g) \cdot x = (f + g)(x) = f(x) + g(x)$

$$3. \quad f.(x+y) = f(x+y) = f(x) + f(y) \\ = f.x + f.y$$

$$4. \quad f.(g.x) = f.(g(x)) = f(g(x)) \\ = (f \circ g)(x) \\ = (f.g)(x) \\ = (f.g).x$$

مما سبق نجد أن M مودول على الحلقة $End(M)$.

-II إن $(M,+)$ زمرة تبديلية فرضاً .

أياً كان $x, y \in M$ و أيأ كان $\alpha, \beta \in R$ فإن :

$$1. \quad 1_R \cdot x = [\mu(1_R)](x) = I_M(x) = x$$

$$2. \quad (\alpha + \beta) \cdot x = [\mu(\alpha + \beta)](x) \\ = [\mu(\alpha) + \mu(\beta)](x) \\ = [\mu(\alpha)](x) + [\mu(\beta)](x) \\ = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$$

$$3. \quad \alpha \cdot (x + y) = [\mu(\alpha)](x + y) \\ = [\mu(\alpha)](x) + [\mu(\alpha)](y) \\ = \alpha \cdot x + \beta \cdot y$$

$$4. \quad \alpha \cdot (\beta \cdot x) = \alpha \cdot ([\mu(\beta)](x)) \\ = [\mu(\alpha)]([\mu(\beta)](x)) \\ = [\mu(\alpha) \cdot \mu(\beta)](x) \\ = [\mu(\alpha \cdot \beta)](x) \\ = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$$

وهذا ما يثبت أن M مودول الحلقة R .

التمرين الثاني :

ليكن M مودولاً على حلقة R . نقول عن المودول M إنه بسيط (Simple) إذا كان M لا يحوي سوى المودولين الجزئيين O و M .
وبعبارة مكافئة يكون المودول M بسيطاً إذا تحقق الشرط :
أياً كان N مودولاً جزئياً من المودول M فإن $N=O$ أو $N=M$.
برهن تكافؤ القضيتين :

I- المودول M بسيط .

II- أياً كان $x \in M$ فإن $R_x = M$ أو $R_x = O$.
الحل :

(I \Rightarrow II) : أياً كان $x \in M$ فإن $R_x = O$ أو $R_x = M$ مودولاً جزئياً من المودول M وبما أن M بسيط فإن $R_x = M$
(II \Rightarrow I) : ليكن $N \neq O$ مودولاً جزئياً من M عندئذٍ $N \subseteq M$ ، ومن ثم أيماً كان $x \in N$ فإن $R_x = N$ ، لكن حسب (II) يكون $R_x = M$ وبالتالي $M \subseteq N$ ومنه يكون $M = N$ أي أن المودول M بسيط .

التمرين الثالث :

ليكن M مودولاً على حلقة R . ولتكن X مجموعة جزئية غير خالية من M وليكن A مثالياً في R .

(1) - أثبت أن المجموعة AX مودول جزئي من المودول M .

(2) - أثبت أن المجموعة RX مودول جزئي من المودول M ، مولد بالمجموعة X .

الحل :

(1) - بما أن A مثالي في الحلقة R فإن AX زمرة جزئية من الزمرة

$(M,+)$ ، كما أنه أيأ كان $\sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i \in AX$ و أيأ كان $\alpha \in R$ فإن

$$\alpha \cdot \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i = \sum_{i=1}^n (\alpha a_i) x_i \in AX \quad (\text{لأن } A \text{ مثالي في } R)$$

إذن AX مودول جزئي من M .

(2) - بما أن الحلقة R هي مثالي في R فحسب الطلب (1) يكون RX مودولاً جزئياً من M . وبما أن :

$$\forall x \in X: x = 1_R \cdot x \in RX$$

فإن $X \subseteq RX$.

إذا كان N مودولاً جزئياً من M ، يحوي X فإن

$$\forall x \in X, \alpha \in R : \alpha x \in N$$

ومنه أيأ كان $\sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i \in RX$ فإن $\sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i \in N$ ومنه $RX \subseteq N$

أي أن RX هو أصغر مودول جزئي من M يحوي X وهذا يعني أن $RX = \langle X \rangle$.

التمرين الرابع :

ليكن M مودول منتهي التوليد على حلقة تبديلية R . ولنفرض أن I مثالياً في R بحيث $I \subseteq \text{Rad } R$.

أثبت أنه إذا كان $I.M = M$ فإن $M = 0$.

الحل :

بما أن المودول M منتهي التوليد فإنه توجد مجموعة جزئية مثل $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ من M بحيث $M = \langle S \rangle$ و S عنصر أصغري في أسرة المجموعات التي تولد كل منها المودول M .

وعندئذ $x_n \in IM$ وبالتالي يوجد $a_1, a_2, \dots, a_n \in I$ بحيث :

$$x_n = \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i$$

ومنه

$$(1_R - a_n)x_n = a_1x_1 + \dots + a_{n-1}x_{n-1}$$

وبما أن $a_n \in \text{Rad } R$ فإن العنصر $(1_R - a_n)$ قلوب في الحلقة R ومنه

$$x_n \in \langle S_1 \rangle \subseteq M \quad ; \quad S_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$$

وبالتالي $M = \langle S_1 \rangle$ وهذا يناقض اختيار المجموعة S .

إذن $M = 0$.

التمرين الأول :

لتكن G زمرة تبديلية منتهية وليكن $\text{Card } G = m$.

1- أثبت أنه أياً كان $n, t \in \mathbb{Z}$ بحيث $n = t \pmod{m}$ فإن $ng = tg$ وذلك أياً كان $g \in G$.

2- أثبت أن G هي مودول على الحلقة $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ بالنسبة إلى قانون التشكيل الخارجي (.) :

$$(\cdot) : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times G \rightarrow G$$
$$\left(\frac{n}{m\mathbb{Z}}, g \right) \alpha ng$$

التمرين الخامس :

لتكن R حلقة تبديلية وليكن M مودولاً على R . من أجل كل عنصر $r \in R$ نأخذ المجموعتين :

$$rM = \{rm \ ; \ m \in M\}$$

$$M_r = \{m \in M; \ rm = 0\}$$

1- أثبت أن كلا من M_r , rM مودول جزئي من المودول M .

2- إذا كان $R = \mathbb{Z}$ حلقة الأعداد الصحيحة و $M = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ، وإذا فرضنا أن

$n = rs$ و s, r أوليان فيما بينهما (أوليان نسبياً) . فأثبت أن $rM = M_s$.

التمرين السادس :

لتكن A, B, C ثلاثة مودولات جزئية من مودول M على حلقة R بحيث

$$A \subseteq B, \quad A + C = B + C, \quad A \cap C = B \cap C$$

برهن أن $A = B$.

التمرين الأول

ليكن $f : M \rightarrow N$ تشاكلاً مودولياً غير صفري. أثبت صحة الاقتضائين التاليين :

$$-1 \quad [\text{التشاكل } f \text{ متباين}] \Rightarrow [\text{المودول } M \text{ بسيط}] .$$

$$-2 \quad [\text{التشاكل } f \text{ غامر}] \Rightarrow [\text{المودول } N \text{ بسيط}] .$$

الحل :

-1 إن $\ker f$ مودول جزئي من المودول M وبما أن المودول M بسيط فإن

$$\ker f = O \quad \text{أو} \quad \ker f = M$$

لكن التشاكل f ليس صفرياً وبالتالي $\ker f \neq M$. إذن $\ker f = O$ وهذا ما يثبت أن التشاكل f متباين .

-2 إن $\text{Im } f$ مودول جزئي من المودول N وبما أن المودول N بسيط فإن

$$\text{Im } f = O \quad \text{أو} \quad \text{Im } f = N$$

لكن التشاكل f ليس صفرياً وبالتالي $\text{Im } f \neq O$. إذن $\text{Im } f = N$ وهذا ما يثبت أن التشاكل f غامر .

التمرين الثاني

ليكن $f : M \longrightarrow N$ تشاكلاً مودولياً وليكن A مودولاً جزئياً من B , وليكن B مودولاً جزئياً من N . أثبت أن :

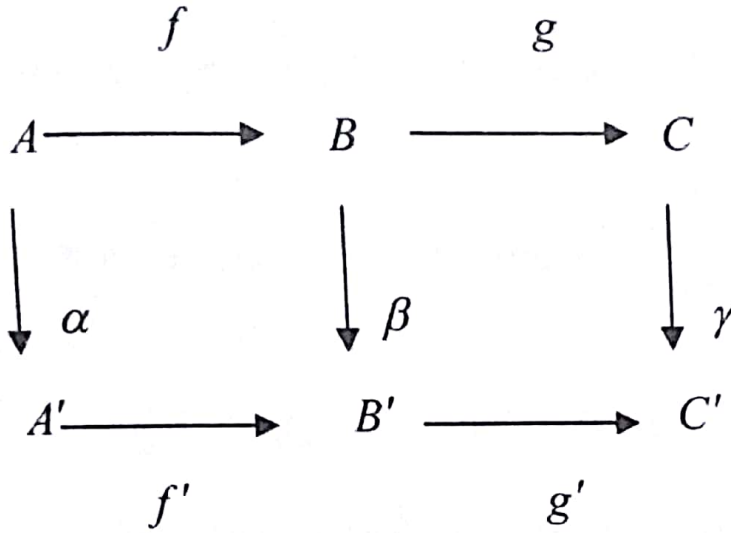
$$f(A \cap f(B)) = f(A) \cap B$$

الحل :

$$\begin{aligned} z \in \overset{\cup}{f}(A \cap \overset{\cup}{f}(B)) &\Leftrightarrow z = f(x) \quad ; \quad x \in A \cap \overset{\cup}{f}(B) \\ &\Leftrightarrow z = f(x) \quad ; \quad x \in A \wedge x \in \overset{\cup}{f}(B) \\ &\Leftrightarrow z = f(x) \quad ; \quad f(x) \in \overset{\cup}{f}(A) \wedge f(x) \in B \\ &\Leftrightarrow z \in \overset{\cup}{f}(A) \wedge z \in B \\ &\Leftrightarrow z \in \overset{\cup}{f}(A) \cap B \end{aligned}$$

التمرين الثالث

ليكن



مخططاً تبادلياً من التشاكلات المودولية، سطريه متتاليتين تامتين .

المطلوب :

- 1- إذا كانت التشاكلات f', γ, α متباينة ، فأثبت أن التشاكل β متباين .
- 2- إذا كانت التشاكلات g, γ, α غامرة ، فأثبت أن التشاكل β غامر .

الحل

1- أياً كان $b \in \ker \beta$ فإن

$$\beta(b) = 0 \dots \dots \dots (1)$$

وبالتالي $g'(\beta(b)) = 0$ وبما أن المخطط تبادلي ينتج أن $\gamma(g(b)) = 0$

لكن التشاكل γ متباين وبالتالي $g(b) = 0$ ومنه $b \in \ker g$ وبما أن السطر

العلوي متتالية تامة ينتج أن $b \in \text{Im } f$ وبالتالي يوجد $a \in A$ بحيث $f(a) = b$

نبدل في العلاقة (1) فنحصل على أن $\beta(f(a)) = 0$ وبما أن المخطط تبادلي ،
ينتج أن $f'(\alpha(a)) = 0$ وبما أن التشاكل f' متباين فإن $\alpha(a) = 0$ كما أن
التشاكل α متباين وبالتالي $a = 0$ ومنه $b = f(0) = 0$ وهذا ما يثبت أن
التشاكل β متباين .

2- أياً كان $b' \in B'$ ، بما أن التشاكل γ غامر فإنه يوجد $c \in C$ بحيث يكون
 $\gamma(c) = g'(b')$ وبما أن التشاكل g غامر فإنه من أجل العنصر c يوجد
 $b \in B$ بحيث $g(b) = c$ ، وبالتالي يكون $g'(b') = \gamma(g(c))$ لكن $\gamma \circ g = g' \circ \beta$
وبالتالي ينتج أن $g'(b') = g'(\beta(b))$ ومنه $b' - \beta(b) \in \ker g'$ ، وبما أن السطر
السفلي متتالية تامة فإن $\ker g' = \text{Im } f'$ وبالتالي يكون $b' - \beta(b) \in \text{Im } f'$
ومنه يوجد $a' \in A'$ بحيث $b' - \beta(b) = f'(a')$ ، وبما أن التشاكل α غامر
فإنه من أجل العنصر $a' \in A'$ يوجد $a \in A$ بحيث $\alpha(a) = a'$ وبالتالي يكون
 $b' - \beta(b) = f'(\alpha(a))$ وبما أن المخطط تبادلي فإن $f' \circ \alpha = \beta \circ f$ ومنه
 $b' - \beta(b) = \beta(f(a))$ وبالتالي $b' = \beta(f(a) + \beta(b))$ وهذا يثبت أن التشاكل
 β غامر .

التمرين الرابع

ليكن



مخططاً من التشاكلات المودولية ، سطره متتالية تامة وفيه $vof = 0$.

أثبت أنه يوجد تشاكل مودولي وحيد $h: C \rightarrow M$ يجعل المخطط تبادلياً .

الحل

حسب المبرهنة (2-6) نجد أنه لإثبات المطلوب يكفي أن نثبت أن التشاكل g غامر وأن $\ker g \subseteq \ker v$.

إن التشاكل g غامر لأن السطر متتالية تامة .

بما أن السطر متتالية تامة فإن $\text{Im } f = \ker g$ وبالتالي أيّاً كان $b \in \ker g$ فإن $b \in \text{Im } f$ وبالتالي يوجد $a \in A$ بحيث $f(a) = b$. بما أن $v \circ f = 0$ فإن $v(f(a)) = 0$ ومن ثم $f(a) \in \ker v$ أي $b \in \ker v$ أي أن $\ker g \subseteq \ker v$. وبذلك يتم المطلوب .

التمرين الأول :

لتكن R حلقة تبديلية وليكن $f : R \times R \longrightarrow R$ تطبيقاً .
أثبت أن f تشاكل مودولي عندما فقط عندما يوجد $\alpha, \beta \in R$ بحيث

$$(\forall x, y \in R) \quad f(x, y) = \alpha.x + \beta.y$$

التمرين الثاني

ليكن $f : A \longrightarrow B$ و $f' : A' \longrightarrow B'$ تشاكلين مودولين ولنعرّف التطبيق

$$f \times f' : A \times A' \longrightarrow B \times B'$$

$$(f \times f')(a, a') = (f(a), f'(a'))$$

$$(\forall (a, a') \in A \times A')$$

1- أثبت أن $f \times f'$ تشاكل مودولي .

2- برهن أنه إذا كانت المتتاليتان :

$$O \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow O$$

$$O \longrightarrow A' \xrightarrow{f'} B' \xrightarrow{g'} C' \longrightarrow O$$

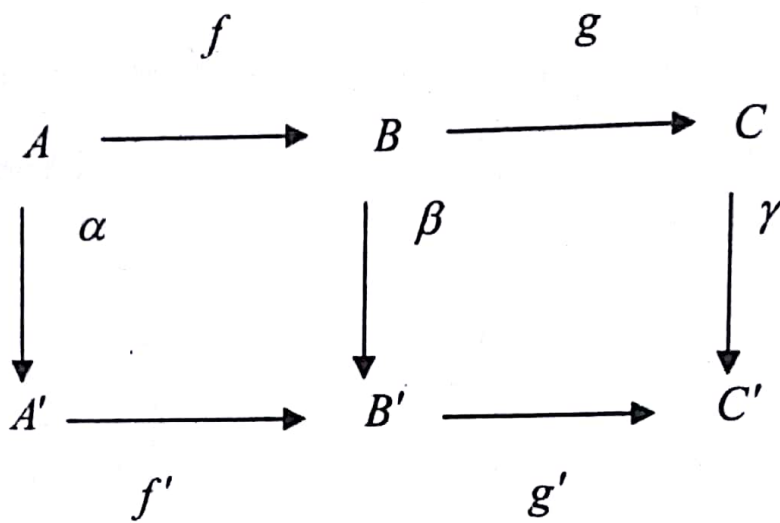
تامتين فإن المتتالية :

$$O \longrightarrow A \times A' \xrightarrow{f \times f'} B \times B' \xrightarrow{g \times g'} C \times C' \longrightarrow O$$

تكون تامة .

التمرين الثالث

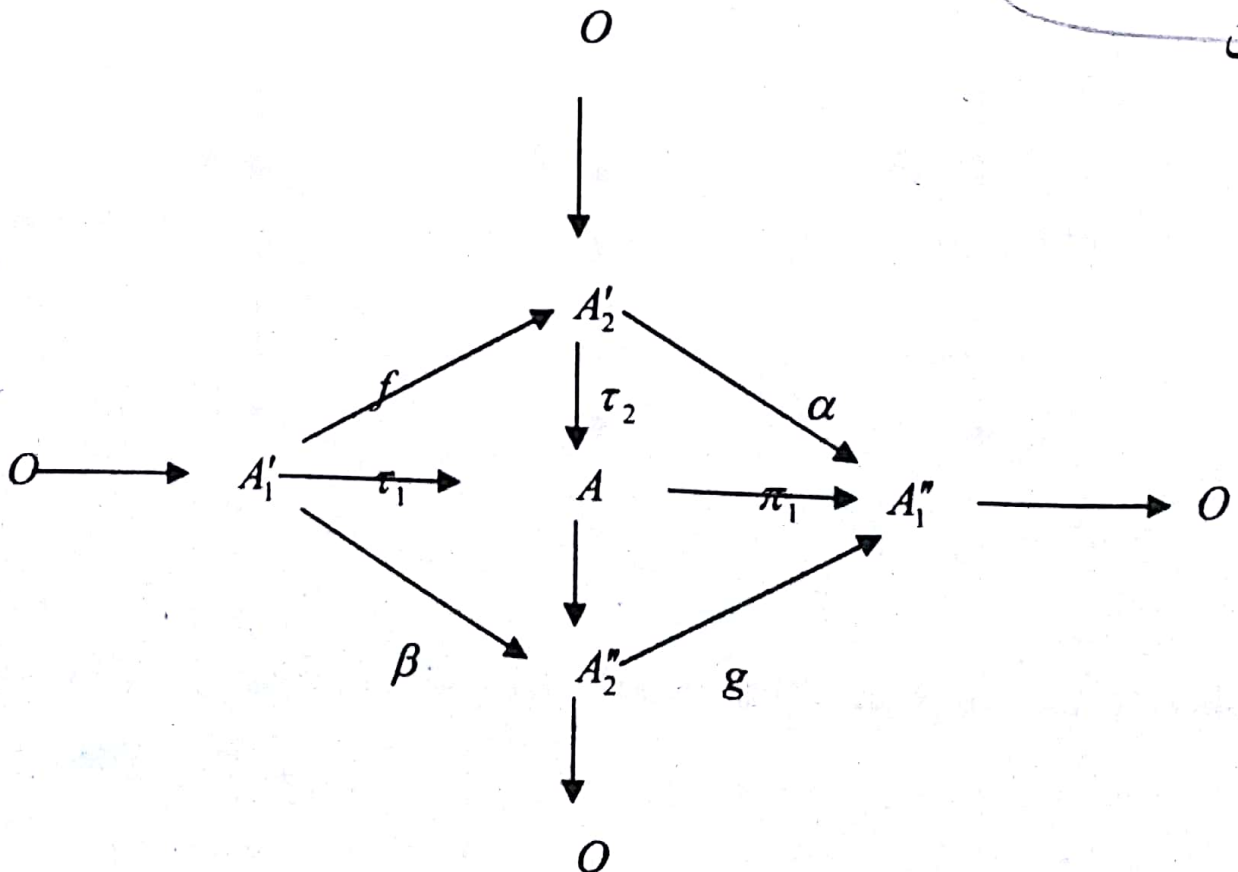
ليكن



مخططاً تبادلياً من التشاكلات المودولية وفيه α, β, γ تماثلات مودولية أثبت أنه يكون السطر العلوي متتالية تامة ، عندما يكون السطر السفلي متتالية تامة .

التمرين الرابع

ليكن



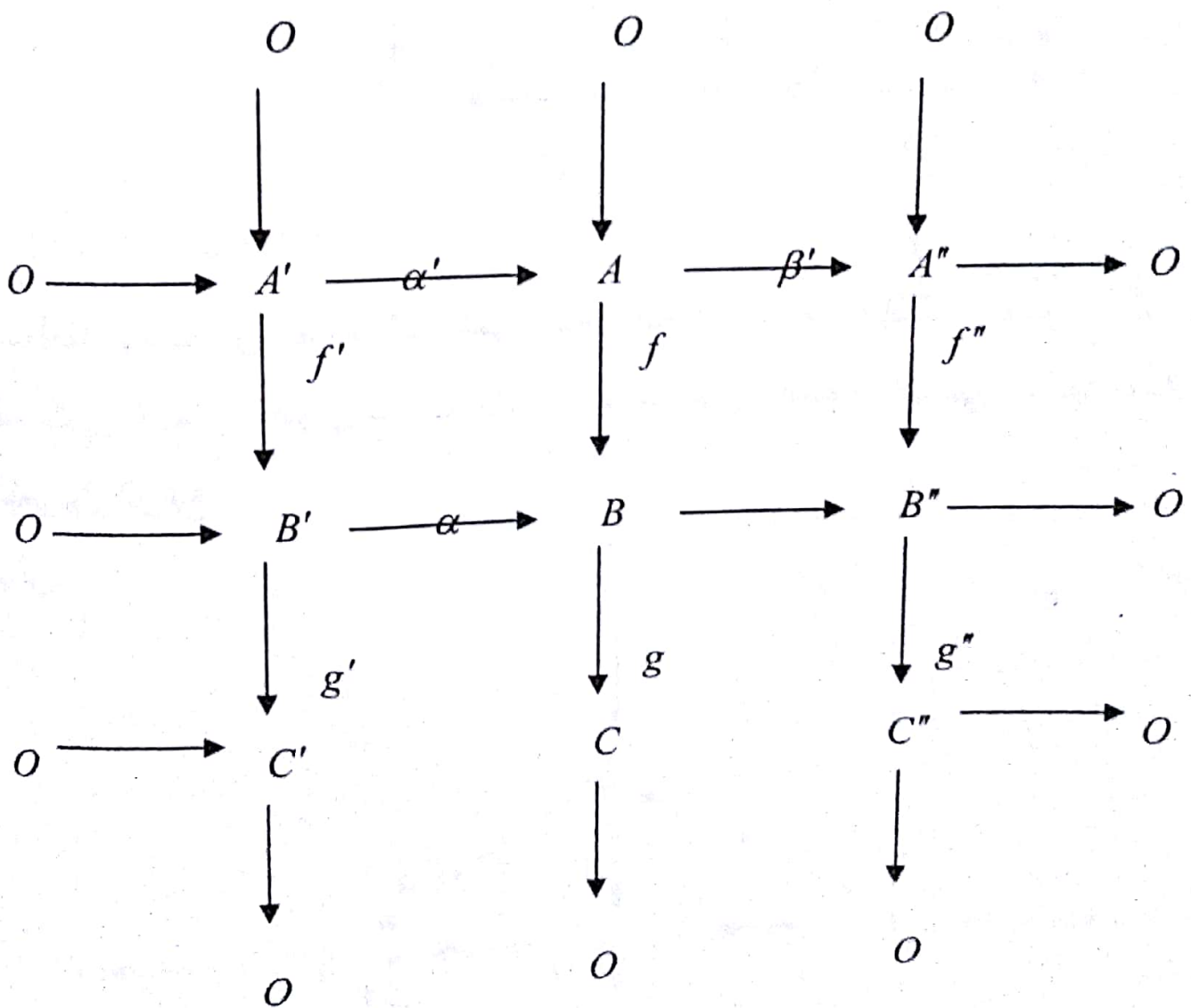
مخططاً تبادلياً من التشاكلات المودولية سطره وعموده متتاليان تامتان والمطلوب :

1- أثبت أن α, β تشاكلان صفريان .

2- أثبت أن f, g تماثلان .

التمرين الخامس

ليكن



مخططاً تبادلياً من التشاكلات المودولية أعمدته الثلاثة متتاليات تامة وسطراه العلويان متتاليان تامتان .

برهن أن يوجد تشاكليين وحدين :

$$\alpha'' : C' \longrightarrow C \quad , \quad \beta'' : C \longrightarrow C''$$

من أجلها يصبح السطر السفلي متتالية تامة ويجعل المخطط الناتج تبادلياً .

(إرشاد : لاحظ أن $g \circ \alpha \circ f' = 0$ وأيضاً $\ker g' = \text{Im } f' \subseteq \ker(g \circ \alpha)$)

ثم اعتمد على المبرهنة (2-6) لإثبات وجود α'' وكذلك β'' .

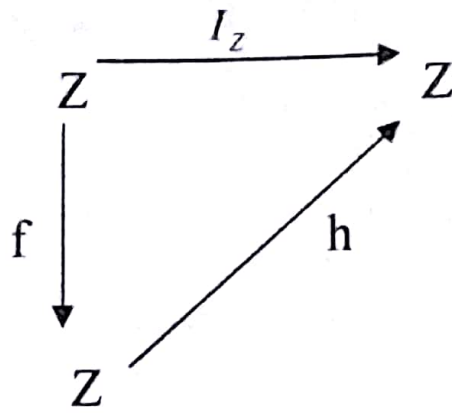
المثال الأول

نعلم أن كل زمرة جمعية تبديلية هي مودول على حلقة الأعداد الصحيحة Z وبالتالي Z هي مودول على Z ولناخذ التشاكلين :

$$f : Z \longrightarrow Z$$

$$f(z) = 2z \quad (\forall z \in Z)$$

$$(المطابق في Z) \quad I_Z : Z \longrightarrow Z$$



فحسب المبرهنة (2-4) يوجد تطبيق $h: Z \rightarrow Z$ بحيث يكون $h \circ f = I_Z$.
 لكن التطبيق h لا يمكن أن يكون تشاكلاً مودولياً ، لأنه إذا كان h تشاكلاً
 مودولياً فإن :

$$\begin{aligned}
 (\forall z \in Z) : (h \circ f)(z) &= I_Z(z) \\
 \Rightarrow h(f(z)) &= z \\
 \Rightarrow h(2z) &= z \\
 \Rightarrow 2h(z) &= z
 \end{aligned}$$

وفي حالة خاصة يجب أن يكون $2h(1) = 1$ وهذا مستحيل لأن المعادلة $2x = 1$
 مستحيلة في Z .

المثال الثاني

ليكن p عدداً أولياً ولناخذ المجموعة :

$$Q_p = \left\{ x = \frac{k}{p^n} ; k \in Z, n \in N \right\} \subseteq Q$$

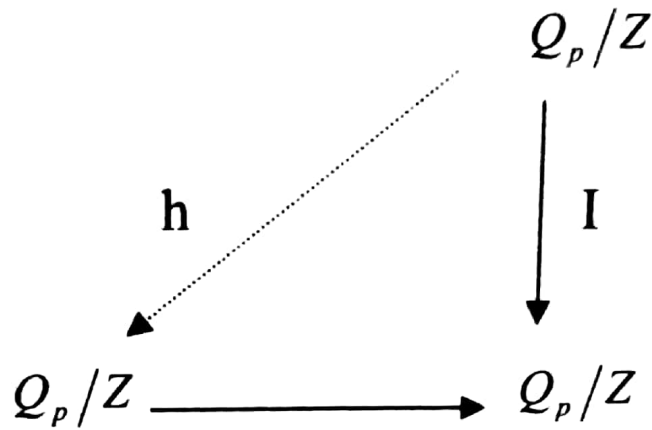
ف نجد بسهولة أن Q_p زمرة جزئية من الزمرة $(Q, +)$ كما أن Z زمرة جزئية
 من الزمرة الجزئية Q_p . ولناخذ التشاكليين :

$$f: Q_p/Z \rightarrow Q_p/Z$$

$$f(x) = px \quad \left(\forall x \in Q_p/Z \right)$$

$$I: Q_p/Z \rightarrow Q_p/Z$$

حيث أن الزمرة \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z} هي مودول على \mathbb{Z} .



أيضاً كان $n \in \mathbb{N}$ و $k \in \mathbb{Z}$ فإن $kP^{-n}/\mathbb{Z} = P(kP^{-n-1}/\mathbb{Z})$ وبالتالي

$$\text{Im } f = \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z} = \text{Im } I$$

فالقضية " (2) من المبرهنة (2-5) محققة وبالتالي حسب المبرهنة المذكورة يوجد تطبيق $h: \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}$ بحيث يكون $f \circ h = I$.
 إن التطبيق h لا يمكن أن يكون تشاكلاً مودولياً ، لأنه إذا كان h تشاكلاً مودولياً فإن :

$$\begin{aligned} P^{-1}/\mathbb{Z} &= f(h(P^{-1}/\mathbb{Z})) = P(h(P^{-1}/\mathbb{Z})) = h(P(P^{-1}/\mathbb{Z})) \\ &= h(0/\mathbb{Z}) = 0/\mathbb{Z} \end{aligned}$$

وهذا مستحيل .

التصريف الأول

ليكن A مودولاً جزئياً من مودول M على حلقة R . أثبت أنه يوجد تشاكل مودولي غامر نواته A .

الحل

لنأخذ العلاقة :

$$f : M \longrightarrow M/A$$

$$f(x) = x + A$$

ف نجد أن العلاقة f تطبيق لأنه إذا كان $x = y$ (حيث $x, y \in M$) فإن $x + A = y + A$ وبالتالي $f(x) = f(y)$. كما أن التطبيق f غامر لأنه أيًا كان $x + A \in M/A$ فإنه يوجد $x \in M$ من أجله يكون $f(x) = x + A$. كما أن f تشاكل مودولي وذلك لأن :

$$\begin{aligned} 1- \quad f(x+y) &= (x+y) + A \\ &= (x+A) + (y+A) \\ &= f(x) + f(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2- \quad f(\alpha x) &= \alpha x + A \\ &= \alpha.(x+A) \\ &= \alpha.f(x) \end{aligned}$$

وأخيراً أيًا كان $x \in \ker f$ فإن

$$\begin{aligned} f(x) = A &\Rightarrow x + A = A \Rightarrow x \in A \\ &\Rightarrow \ker f \subseteq A \end{aligned}$$

وبالعكس إذا كان $x \in A$ فإن $x + A = A$ أي $f(x) = A$.

ومنه $x \in \ker f$ أي $A \subseteq \ker f$. إذن $\ker f = A$.

التمرين الثاني :

ليكن $f: M \rightarrow N$ تشاكلاً مودولياً ، وليكن A, B مودولين جزئيين من

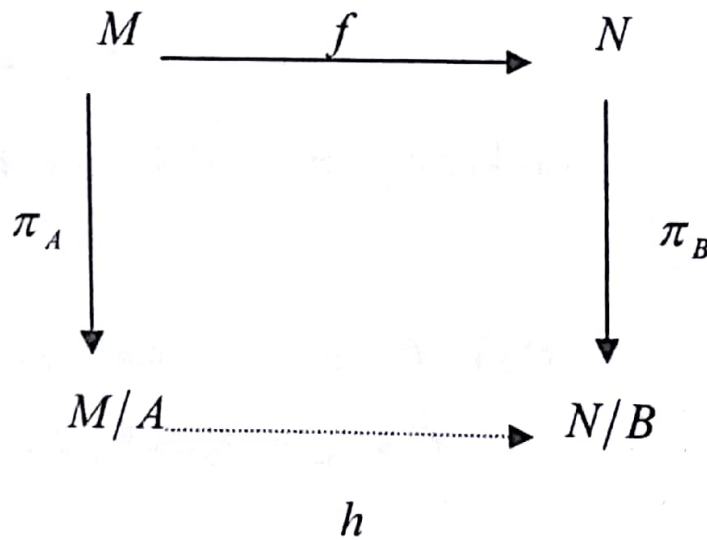
المودولين M, N على الترتيب .

المطلوب

أولاً : أثبت أن القضيتين التاليتين متكافئتان:

$$f(A) \subseteq B \quad -I$$

-II يوجد تشاكل مودولي وحيد $h: M/A \rightarrow N/B$ بحيث يجعل المخطط



تبادلياً

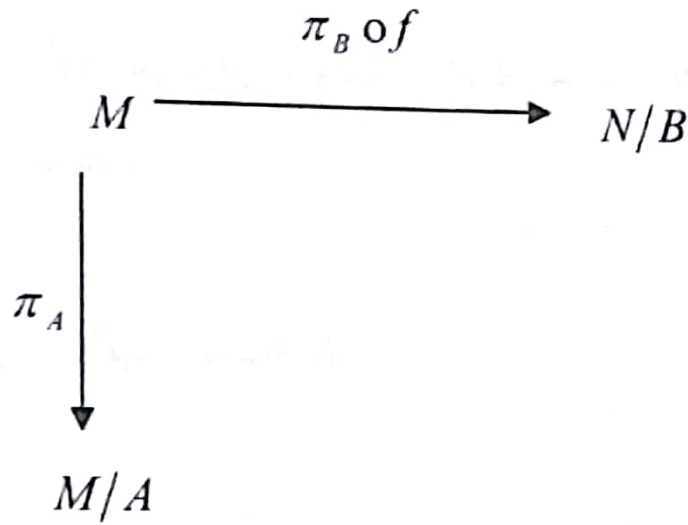
ثانياً : في حالة وجود التشاكل h أثبت أن

$$A = f(B) \Leftrightarrow h \text{ متباين} \quad (a)$$

$$\text{Im } f + B = N \Leftrightarrow h \text{ غامر} \quad (b)$$

الحل

أولاً : لتأمل المخطط



ف نجد أن القضية (II) تكافئ القضية $\ker \pi_A \subseteq \ker(\pi_B \circ f)$ (وذلك حسب المبرهنة (2-6)) ، كما أن :

$$(\forall x \in M) \quad x \in \ker \pi_A \Leftrightarrow x + A = 0 + A \Leftrightarrow x \in A$$

وبشكل مشابه نجد أن

$$x \in \ker(\pi_B \circ f) \Leftrightarrow f(x) + B = 0 + B \Leftrightarrow f(x) \in B$$

وبالتالي القضية (II) تكافئ القضية $f(A) \subseteq B$.

ثانياً :

(a) . إن

$$\begin{aligned} \ker h &= \{x + A \ ; \ f(x) \in B\} \\ &= \{x + A \ ; \ x \in f^{-1}(B)\} = f^{-1}(B) / A \end{aligned}$$

وبذلك يكون لدينا :

$$\ker h = 0 + B \Leftrightarrow h \text{ متباين}$$

وبعبارة مكافئة :

$$\overset{\cup}{f}(B) = A \Leftrightarrow h \text{ متباين}$$

(b) . إن :

$$\text{Im } h = \{f(x) + B \ ; \ x \in M\}$$

وبالتالي :

$$[(\forall n \in N)(\exists x \in M): n + B = f(x) + B] \Leftrightarrow h \text{ غامر}$$

$$[(\forall n \in N)(\exists x \in M): n - f(x) \in B] \Leftrightarrow$$

$$[\text{Im } f + B = N] \Leftrightarrow$$

التمرين الثالث

إذا كان $f: M \rightarrow N$ تشاكلاً مودولياً ، فأثبت وجود تماثل وحيد $h: M/\ker f \rightarrow \text{Im } f$ بحيث يجعل المخطط :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f^+} & \text{Im } f \\ \downarrow \pi & & \nearrow h \\ M/\ker f & & \end{array}$$

تبادلياً .

حيث

$$f^+ : M \rightarrow \text{Im } f$$

$$f^+(x) = f(x)$$

الحل:

حسب مبرهنة التماثل الأولى إن التطبيق

$$h : M/\ker f \longrightarrow \text{Im } f$$

$$h(x + \ker f) = f(x)$$

تماثل مودولي .

$$M/\ker f \cong \text{Im } f$$

زد على ذلك إن h يجعل المخطط السابق تبادلياً لأنه أياً كان $x \in M$ فإن :

$$\begin{aligned} (h \circ \pi)(x) &= h(\pi(x)) \\ &= h(x + \ker f) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

أي أن $h \circ \pi = f$.

لنبرهن أخيراً أن التماثل h هو الوحيد الذي يجعل المخطط تبادلياً .

لنفرض أنه يوجد تماثل آخر $k : M/\ker f \longrightarrow \text{Im } f$ بحيث $k \circ \pi = f$ وبالتالي

يكون $h \circ \pi = k \circ \pi$ ، وبما أن التماثل π غامر فهو قابل للاختصار من

اليمين وبالتالي ينتج $h = k$.

التمرين الرابع

ليكن A, B مودولين جزئيين من مودول M على حلقة R . أثبت أن :

$$(A+B)/B \cong A/A \cap B$$

الحل:

لنأخذ العلاقة :

$$f : A \longrightarrow (A+B)/B$$

المعرفة كما يلي :

$$f(x) = x + B \quad ; \quad (\forall x \in A)$$

فوجد أن f تطبيق لأن :

$$(\forall x, y \in A): \quad x = y \Rightarrow x + B = y + B \Rightarrow f(x) = f(y)$$

كما أن التطبيق f تشاكل مودولي لأن :

$$\begin{aligned} 1) \quad f(x+y) &= (x+y) + B \\ &= (x+B) + (y+B) \\ &= f(x) + f(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad f(\alpha.x) &= (\alpha.x) + B \\ &= \alpha.(x+B) \\ &= \alpha.f(x) \end{aligned}$$

وذلك أيأ كان $x, y \in A$ و أيأ كان $\alpha \in R$.

كما أن التشاكل f غامر لأنه أيأ كان $z \in (A+B)/B$ فإن

$$z = t + B \quad ; \quad t = a + b$$

$$z = (a+b) + B = (a+B) + (b+B) \quad ; \quad a \in A, b \in B$$

$$= a + B \quad ; \quad a \in A$$

أي أنه أيأ كان $z \in (A+B)/B$ يوجد $a \in A$ بحيث $f(a) = a + B = z$

وهذا يثبت أن f غامر .

لنثبت الآن أن $\ker f = A \cap B$. أيأ كان $x \in \ker f$ فإن :

$$f(x) = B \Rightarrow x + B = B \Rightarrow x \in B$$

ومنه $\ker f \subseteq B$ ، لكن $\ker f \subseteq A$ ، وبالتالي ينتج $\ker f \subseteq A \cap B$.

من جهة أخرى ، أيأ كان $u \in A \cap B$ فإن $u \in A$ و $u \in B$ ويكون

$$f(u) = u + B = B \Rightarrow u \in \ker f$$

ومنه $A \cap B \subseteq \ker f$. إذن $\ker f = A \cap B$.

وبتطبيق مبرهنة التماثل الأولى ينتج

$$(A + B) / B \cong A / AI B$$

التمرين الأول :

لتكن R حلقة تبديلية ولناخذ التطبيق :

$$f : R^3 \longrightarrow R^2$$

$$f(x, y, z) = (x, y) \quad (\forall (x, y, z) \in R^3)$$

المطلوب :

1 - أثبت أن f تشاكل مودولي غامر .

2 - بفرض أن :

$$D = \{ (0, 0, z) \ ; \ z \in R \} \subseteq R^3$$

أثبت أن D مودول جزئي من المودول R^3 وأن $R^3/D \cong R^2$.

التمرين الثاني :

ليكن $f : M \longrightarrow N$ تشاكلاً مودولياً . نرمز مرافق نواة التشاكل f بالرمز

$\text{co ker } f$ ونعرفها بأنها المودول $N/\text{Im } f$ ، ولناخذ الغمر القانوني :

$$\pi : N \longrightarrow \text{co ker } f$$

والتباين القانوني :

$$J : \text{ker } f \longrightarrow M$$

المطلوب إثبات صحة القضيتين الآتيتين :

1 - إذا كان التشاكل f متبايناً فإن $N \cong \text{ker } \pi$.

2 - إذا كان التشاكل f غامراً فإن $N \cong \text{co ker } J$.

$$M = M_1 \oplus M_2 \quad \text{التمرين الأول :}$$

ليكن M_1, M_2 مودولين متكاملين في مودول M على حلقة R .
أثبت أن :

$$M_2 \cong M/M_1$$

الحل :

بما أن $M = M_1 \oplus M_2$ فإن كل عنصر $m \in M$ يكتب بالشكل الوحيد :

$$m = m_1 + m_2 \quad ; \quad m_1 \in M_1, \quad m_2 \in M_2$$

لنأخذ الإسقاط القانوني :

$$\text{Pr}_2 : M \longrightarrow M_2$$

$$\text{Pr}_2(m = m_1 + m_2) = m_2$$

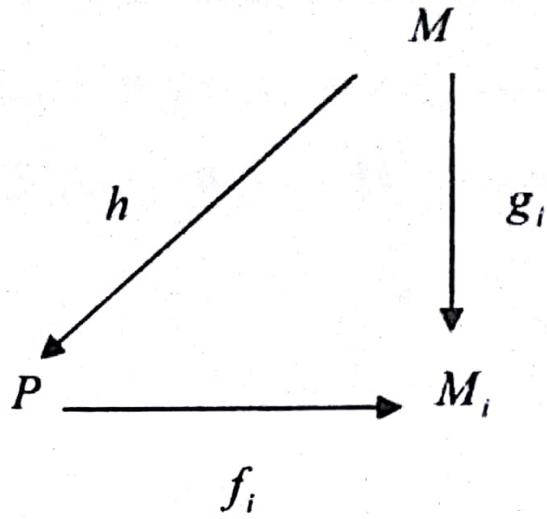
من الواضح أن Pr_2 تشاكل غامر نواته $\ker \text{Pr}_2 = M_1$ وحسب مبرهنة التماثل الأولى يكون :

$$M/M_1 \cong M_2$$

التمرين الرابع:

ليكن P مودولاً على الحلقة R ولتكن $(M_i)_{i \in I}$ أسرة مودولات على الحلقة R . أثبت أن $P \cong \prod_{i \in I} M_i$ عندما فقط ، عندما توجد أسرة من التشاكلات

المودولية $(f_i : P \rightarrow M_i)_{i \in I}$ بحيث يكون من أجل كل مودول M على الحلقة R وكل أسرة من التشاكلات $(g_i : M \rightarrow M_i)_{i \in I}$ يوجد تشاكل وحيد $h : M \rightarrow P$ يجعل المخطط :



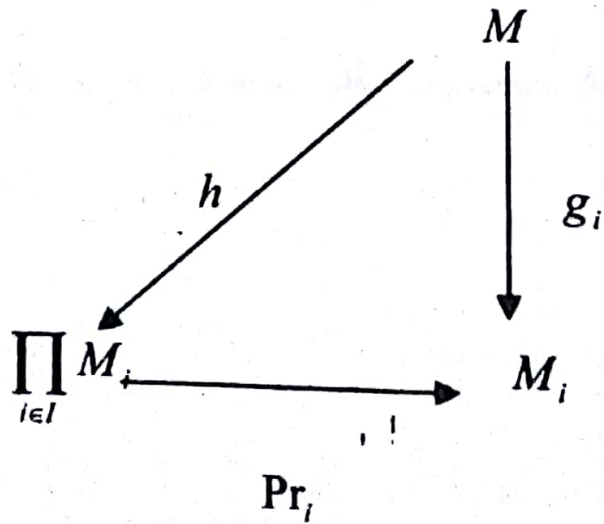
تبادلياً .

الحل :

أولاً : لنفرض أن $P \cong \prod_{i \in I} M_i$. عندئذٍ توجد أسرة التشاكلات الإسقاطات

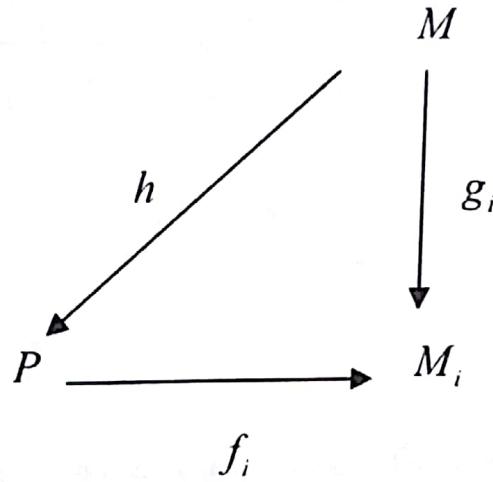
القانونية $(pr_i)_{i \in I}$ بحيث من أجل أي مودول M على الحلقة R وكل أسرة من التشاكلات $(g_i : M \longrightarrow M_i)_{i \in I}$

يوجد تشاكل وحيد $h : M \longrightarrow P$: يجعل المخطط :



تبادلياً . (لأن $(pr_i)_{i \in I}$ ، $\prod_{i \in I} M_i$) جداء للأسرة $(M_i)_{i \in I}$.

ثانياً : لتكن أسرة تشاكلات مودولية بحيث يكون من أجل كل مودول M على الحلقة R وكل أسرة من التشاكلات $(g_i : M \rightarrow M_i)_{i \in I}$ يوجد تشاكل وحيد $h : M \rightarrow P$ يجعل المخطط :

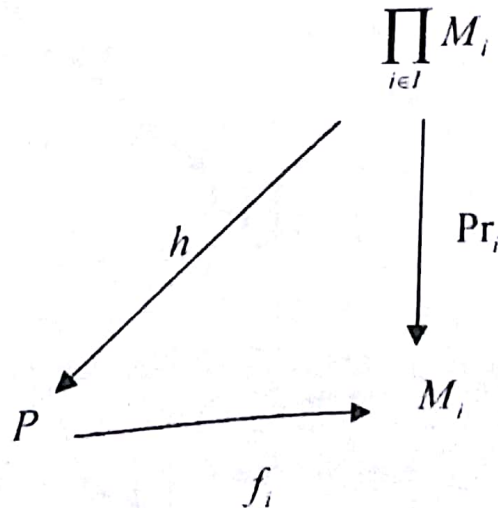


تبادلياً . أي :

$$f_i \circ h = g_i \quad ; \quad \forall i \in I$$

ولنبرهن على أن $P \cong \prod_{i \in I} M_i$.

إذا أخذنا $M = \prod_{i \in I} M_i$ و $g_i = pr_i$ نحصل على المخطط التبادلي :

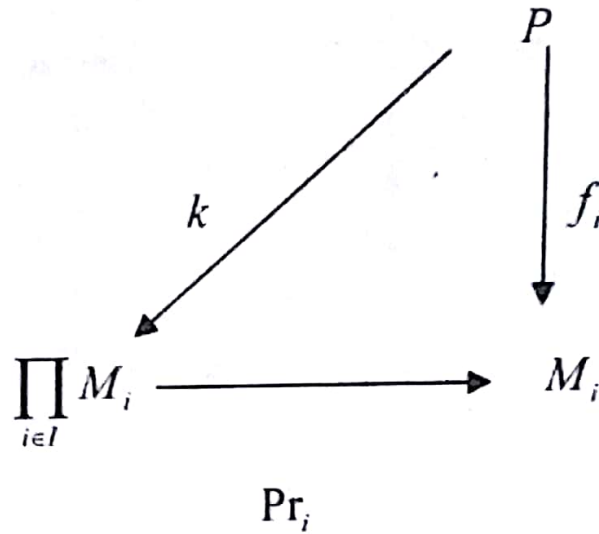


ومنه :

$$f_i \circ h = pr_i \quad ; \quad \forall i \in I$$

ومن ناحية أخرى وبما أن $(\prod_{i \in I} M_i, (pr_i)_{i \in I})$ جداء للأسرة $(M_i)_{i \in I}$

فإنه من أجل المودول P يوجد تشاكل مودولي وحيد $k: P \rightarrow \prod_{i \in I} M_i$ يجعل المخطط :



تبادلياً . أي :

$$pr_i \circ k = f_i \quad ; \quad \forall i \in I$$

وبالتالي :

$$pr_i \circ k \circ h = pr_i \quad ; \quad \forall i \in I$$

$$f_i \circ h \circ k = f_i \quad ; \quad \forall i \in I$$

ومنه :

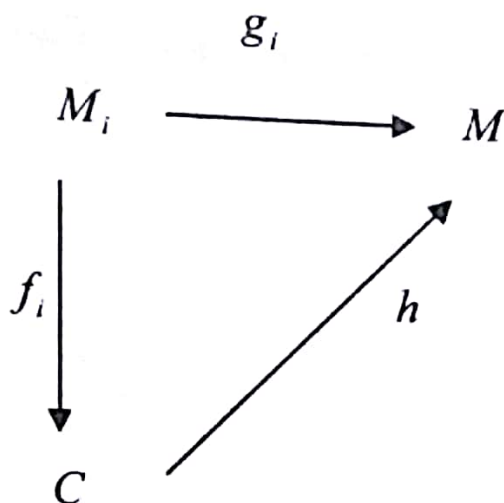
$$k \circ h = I_{\prod_{i \in I} M_i} \quad \text{and} \quad h \circ k = I_P$$

وهذا يثبت أن h تماثل مودولي . أي أن $P \cong \prod_{i \in I} M_i$

التمرين الخامس :

ليكن C مودولاً على حلقة R ، وليكن أسرة مودولات على الحلقة R $(M_i)_{i \in I}$ أثبت أن $C = \bigoplus_{i \in I} M_i$ عندما فقط ، عندما توجد أسرة من التشاكلات المودولية

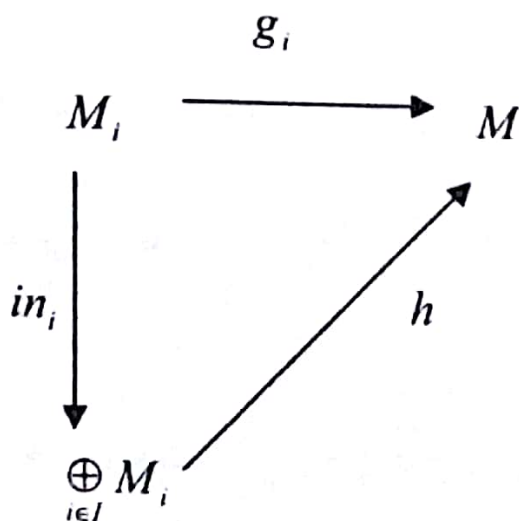
أسرة من التشاكلات $(g_i : M_i \rightarrow M)_{i \in I}$ بحيث يكون من أجل كل مودول M على الحلقة R وكل
 يوجد تشاكل وحيد $h : C \rightarrow M$ يجعل المخطط :



تبادلياً .

الحل :

أولاً : لنفرض أن $C \cong \bigoplus_{i \in I} M_i$. عندئذٍ توجد أسرة تشاكلات التباينات القانونية
 $(in_i)_{i \in I}$ بحيث من أجل أي مودول M على الحلقة R وكل أسرة من
 التشاكلات $(g_i : M_i \rightarrow M)_{i \in I}$ يوجد تشاكل وحيد $h : C \rightarrow M$ يجعل
 المخطط :



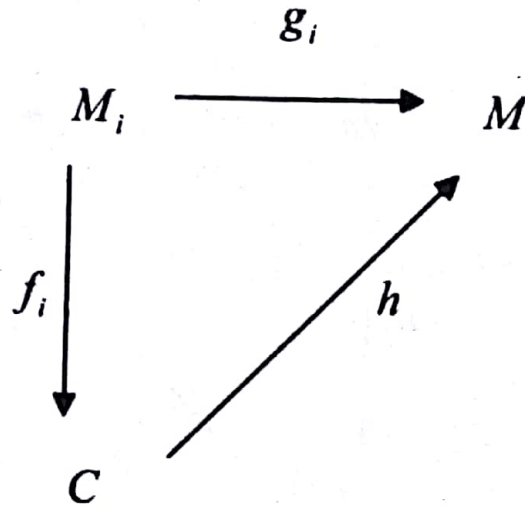
تبادلياً .

لأن $((M_i)_{i \in I} , (in_i)_{i \in I})$ جداء مرافق للأسرة $(M_i)_{i \in I}$.

ثانياً : لتكن $(f_i : C \longrightarrow M_i)_{i \in I}$ أسرة تشاكلات مودولية بحيث يكون من أجل

كل مودول M على الحلقة R وكل أسرة من التشاكلات $(g_i : M_i \longrightarrow M)_{i \in I}$

يوجد تشاكال وحيد $h : C \longrightarrow M$ يجعل المخطط :

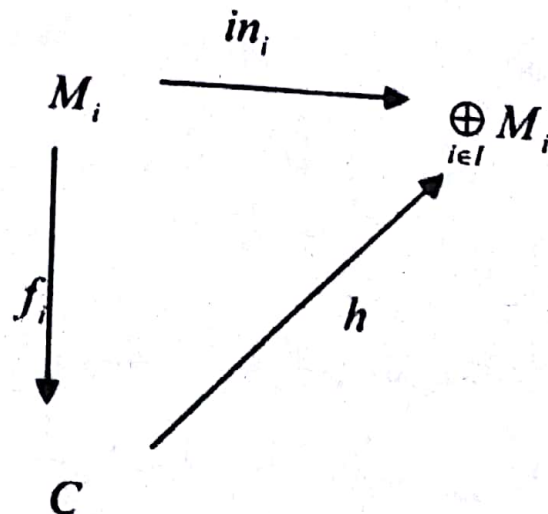


تبادلياً . أي

$$h \circ f_i = g_i \quad \forall i \in I$$

ولنبرهن على أن $C \cong \bigoplus_{i \in I} M_i$.

إذا أخذنا $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ و $g_i = in_i$ فنحصل على المخطط التبادلي :



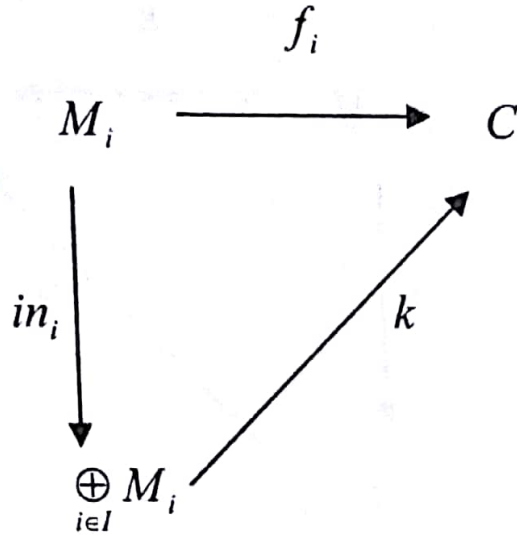
ومنه

$$h \circ f_i = in_i \quad \forall i \in I$$

ومن جهة أخرى ، وبما أن $(\bigoplus_{i \in I} M_i, (in_i)_{i \in I})$ جداء مرافق للأسرة $(M_i)_{i \in I}$

فإنه من أجل المودول C يوجد تشاكل مودولي وحيد $k: \bigoplus_{i \in I} M_i \rightarrow C$ يجعل

المخطط



تبادلياً . أي

$$k \circ in_i = f_i \quad ; \quad \forall i \in I$$

وبالتالي :

$$k \circ h \circ f_i = f_i \quad ; \quad \forall i \in I$$

$$h \circ k \circ in_i = in_i \quad ; \quad \forall i \in I$$

ومنه :

$$k \circ h = I_C \quad \text{and} \quad h \circ k = I_{\bigoplus_{i \in I} M_i}$$

وهذا ما يثبت أن h تماثل مودولي أي أن $C \cong \bigoplus_{i \in I} M_i$

التمرين السادس :

ليكن M مودولاً على حلقة R ، ولتكن $(M_j)_{j \in I}$ أسرة مودولات على الحلقة R

ولتكن $(J_i, M_i \longrightarrow M)_{i \in I}$ أسرة تشاكلات . أثبت أن $(M, (J_i)_{i \in I})$ جداء

مرافق للأسرة $(M_i)_{i \in I}$ عندما فقط ، عندما توجد أسرة تشاكلات
 بحيث $(\pi_i : M \rightarrow M_i)$:

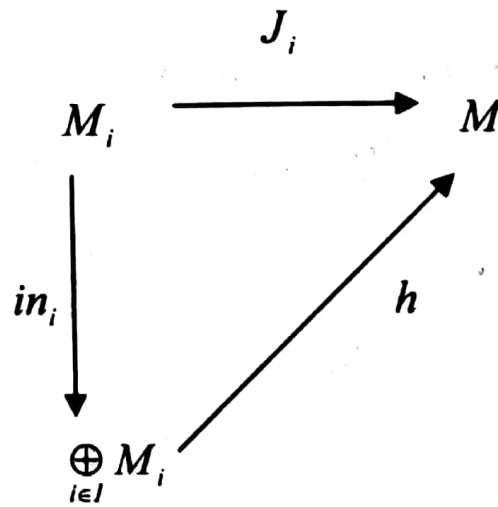
$$\pi_k \circ J_i = \begin{cases} I_M & \text{if } k = i ; \\ 0 & \text{if } k \neq i . \end{cases} \quad (1)$$

(2) . أياً كان $m \in M$ فإن $\pi_i(m) = 0$ من أجل جميع i دون عدد منته

$$\sum_{i \in I} (J_i \circ \pi_i)(m) = m \text{ منها وإن}$$

الحل

أولاً : لنفرض أن $(M, (J_i)_{i \in I})$ جداء مرافق للأسرة $(M_i)_{i \in I}$ عندئذ حسب
 المبرهنتين (4-6) و (4-5) يوجد تشاكل $h : \bigoplus_{i \in I} M_i \rightarrow M$ يجعل المخطط



تبادلياً .

من أجل كل $i \in I$ لناخذ التطبيق :

$$\pi_i : M \rightarrow M_i$$

$$\pi_i = \text{Pr}_i^\oplus \circ h^{-1}$$

حيث $\text{Pr}_i^\oplus : \bigoplus_{i \in I} M_i \rightarrow M_i$ مقصور الإسقاط القانوني

$\text{Pr}_i : \prod_{i \in I} M_i \rightarrow M_i$ على المودول $\bigoplus_{i \in I} M_i$. عندئذ من أجل كل $i, k \in I$

يكون :

$$\pi_i \circ J_i = \text{Pr}_k^\oplus \circ h \circ J_i = \text{Pr}_k^\oplus \circ in_i = \begin{cases} 1_M & k = i \\ 0 & \text{if } k \neq i \end{cases}$$

كما أن من أجل كل $m \in M$ يكون $\pi_i(m) = \text{Pr}_i^\oplus(h^{-1}(m))$ وأن $\pi_i(m) = 0$ من أجل جميع i باستثناء عدد منته منها . ويكون :

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} (J_i \circ \pi_i)(m) &= \sum_{i \in I} (h \circ in_i \circ \text{Pr}_i^\oplus \circ h^{-1})(m) \\ &= h \circ \left(\sum_{i \in I} (in_i \circ \text{Pr}_i^\oplus \circ h^{-1}) \right)(m) \\ &= m \end{aligned}$$

وبذلك بملاحظة أن $\sum_{i \in I} (in_i \circ \text{Pr}_i^\oplus)$ هو المطابق على $\bigoplus_{i \in I} M_i$.

نتيجة:

لتفرض الآن أن القضيتين (1) و (2) محقتان . عندئذ حسب (2) تكون القضية

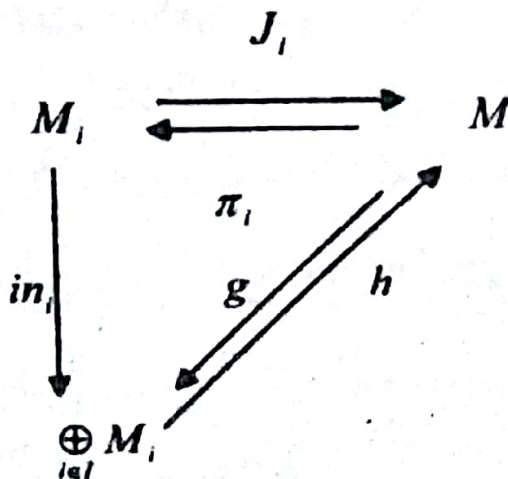
$$g(m) = \sum_{i \in I} (in_i \circ \pi_i)(m)$$

صحة من أجل أي تشاكل $g: M \rightarrow \bigoplus_{i \in I} M_i$ ، و حسب المبرهنة (4-6)

يوجد تشاكل مودولي $h: \bigoplus_{i \in I} M_i \rightarrow M$ من أجله يكون :

$$h \circ in_i = J_i \quad ; \quad \forall i \in I$$

لنتامل المخطط :



ف نجد أن من أجل كل $m \in M$ يكون :

$$h(g(m)) = \sum (h \circ in_i \circ \pi_i)(m)$$

$$= \sum_{i \in I} (j_i \circ \pi_i)(m)$$

$$= m$$

أي أن $h \circ g = I_M$.

كما أنه أياً كان $x \in \bigoplus_{i \in I} M_i$ يكون $\sum_{i \in I} (in_i \circ pr_i^\oplus)(x) = x$ وبالتالي :

$$g(h(x)) = \sum_{i \in I} (in_i \circ \pi_i)(h(x))$$

$$= \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} (in_i \circ \pi_i \circ h \circ in_j \circ pr_j^\oplus)(x)$$

$$= \sum_{i \in I} (in_i \circ pr_i^\oplus)(x)$$

$$= x$$

وهذا ما يبين أن $g \circ h$ هو التطبيق المطابق في $\bigoplus_{i \in I} M_i$ وبالتالي $g \circ h$ تماثل

وتطبيق المبرهنة (4-5) نجد أن $(M, (J_i)_{i \in I})$ جداء مرافق للأسرة $(M_i)_{i \in I}$.

التمرين الأول :

لتكن أسرة منتهية من المودولات الجزئية من مودول M على

حلقة R ، وليكن $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ وليكن N_k مودولاً جزئياً من M_k

$N = \sum_{i=1}^n N_i$ وليكن $k = 1, 2, \dots, n$

أثبت أن :

$$(1). \quad N = \bigoplus_{i=1}^n N_i$$

$$(2). \quad M/N \cong \bigoplus_{i=1}^n (M_i/N_i)$$

التمرين الثاني :

ليكن M مودولاً على حلقة R ، ولتكن أسرة مودولات على الحلقة

R ولتكن أسرة تشاكلات مودولية $(\pi_i : M \rightarrow M_i)_{i \in I}$.

أثبت أن $(M, (\pi_i)_{i \in I})$ جداء للأسرة $(M_i)_{i \in I}$ عندما فقط ، عندما توجد أسرة

تشاكلات $(J_i : M_i \rightarrow M)_{i \in I}$ بحيث :

(1) .

$$\pi_k \circ J_i = \begin{cases} I_M & \text{if } k = i \\ 0 & \text{if } k \neq i \end{cases}$$

(2) . أيأ كان $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} M_i$ يوجد عنصر وحيد $x \in M$ بحيث :

$$\pi_i(x) = x_i \quad \forall i \in I$$

التمرين الأول

ليكن M مودولاً على حلقة تبديلية R . أثبت تكافؤ القضيتين الآتيتين
I - المودول M منتهي التوليد .

II - يوجد تشاكل غامر $f: R^n \longrightarrow M$ (حيث n عدد صحيح موجب)

الحل :

(I \Rightarrow II) لنفرض أن المودول M مولد بالمجموعة $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$
ولنأخذ العلاقة :

$$f: R^n \longrightarrow M$$

المعرفة كما يلي :

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$$

ف نجد أن العلاقة f تطبيق لأنه

يأكان $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ و $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ من R^n بحيث

$\alpha_i = \beta_i (\forall i = 1, 2, \dots, n)$ فإن $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$

وبالتالي $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i$ أي أن

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = f(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$$

كما أن التطبيق f تشاكل مودولي لأنه

أياً كان $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ ، $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ من R^n و أيأ كان $\lambda \in R$

فإن :

$$\begin{aligned}
f((\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) + (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)) &= f(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n) \\
&= \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) v_i \\
&= \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^n \beta_i v_i \\
&= f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) + f(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)
\end{aligned}$$

وأن

$$\begin{aligned}
f(\lambda(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)) &= f(\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \dots, \lambda\alpha_n) \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda\alpha_i v_i \\
&= \lambda \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \\
&= \lambda f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)
\end{aligned}$$

كما أن التشاكل f غامر لأنه : أيأ كان $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ من M فإن

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \text{ ويكون } (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in R$$

تشاكل مودولي غامر .

(II \Rightarrow I) : لنفرض أن $f: R^n \rightarrow M$ تشاكل مودولي غامر . وبما أن

المودول R^n حر يقبل $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ قاعدة له فإنه أيأ كان $m \in M$ يوجد

$x \in R^n$ (لأن f غامر) بحيث $m = f(x)$ وبما أن $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ قاعدة

للمودول R^n فإن

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \quad ; \quad \alpha_i \in R$$

وبالتالي $m = f(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i)$ وبما أن f تشاكل مودولي ينتج أن

$$m = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(e_i) \text{ وهذا ما يثبت أن المجموعة } \{f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\}$$

مولدة للمودول M . أي أن المودول M منتهي التوليد .

التمرين الثاني

ليكن M, N مودولين على حلقة R وليكن N حراً قاعدته $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ وليكن $f: M \rightarrow N$ تشاكلاً مودولياً غامراً . أثبت أنه يوجد مودول جزئي

$$M \cong M_1 \oplus \ker f \text{ بحيث } M_1$$

الحل

بما أن التشاكل f غامر فإنه من أجل $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ توجد $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ من M بحيث

$$f(x_i) = y_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

إن المجموعة $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ حرة لأنه إذا كان $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0$ (حيث

$\alpha_i \in R$) فإن $f(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i) = 0$ وبما أن f تشاكل مودولي ينتج أن

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i) = 0 \text{ وبالتالي } \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i = 0 \text{ وبما أن } \{y_1, y_2, \dots, y_n\} \text{ حرة فإن}$$

$$\alpha_i = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

وبالتالي المودول $M_1 = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ مودولاً جزئياً حراً من M . ولنثبت

أن $M = M_1 \oplus \ker f$ ، لذلك يكفي أن نثبت القضيتين

$$(1) \quad M = M_1 + \ker f$$

$$(2) \quad M_1 \cap \ker f = 0$$

من أجل (1) أيأ كان $x \in M$ فإن $f(x) \in N$ وبالتالي

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \beta_i y_i \quad ; \quad \beta_i \in R$$

ومن ه $f(x) - \sum_{i=1}^n \beta_i y_i = 0$ وبما أن f غامر ينتج أن

$$x - \sum_{i=1}^n \beta_i x_i \in \ker f \quad \text{ومن ه} \quad f(x - \sum_{i=1}^n \beta_i x_i) = 0 \quad \text{أي} \quad f(x) - \sum_{i=1}^n \beta_i f(x_i) = 0$$

وبملاحظة أن

$$x \in M \quad , \quad \sum_{i=1}^n \beta_i x_i \in M_1$$

ينتج أن $M = M_1 + \ker f$.

من أجل (2) : أيأ كان $a \in M_1 \cap \ker f$ فإن

$$a \in M_1 \quad , \quad a \in \ker f$$

وبالتالي

$$a = \sum_{i=1}^n \gamma_i x_i \quad , \quad f(a) = 0 \quad \gamma_i \in R$$

وبالتالي $f(\sum_{i=1}^n \gamma_i x_i) = 0$ ، أي $\sum_{i=1}^n \gamma_i f(x_i) = 0$ ومن ثم $\sum_{i=1}^n \gamma_i y_i = 0$ وكون

المجموعة $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ حرة فإن $(\forall i = 1, 2, \dots, n) \gamma_i = 0$ وبالتالي

$a = 0$. إذن $M_1 \cap \ker f = 0$. وذلك يتم المطلوب .

التمرين الثاني :

لتكن M, N مودولين حرين وليكن $f: M \longrightarrow N$ تشاكلاً مودولياً ، برهن أن القضيتين التاليتين متكافئتان :

I - التشاكل f تماثل .

II - إذا كانت $(a_i)_{i \in I}$ قاعدة للمودول M فإن $(f(a_i))_{i \in I}$ قاعدة للمودول N .