المحاضرة ١٦

المباراة ذات المجموع الصفري :

إذا كان مجموع الدخل للاعبين يساوي الصفر (مجموع المكاسب والخسائر يساوي الصفر)

الاستراتيجية الصرفة (اختيار أحسن الأسوأ) Max Min

تقوم كل لاعب باختيار أقل دخل له من كل استراتيجية متاحة ثم تقوم باختيار الاستراتيجية التي يكون فيها الدخل الأصغري الساعي أكبر ما يمكن

~~أي أننا نختار الـ Min من كل سطر أو عمود ثم نختار من بين الأسوأ الأحسن أي الـ Max Min~~

في مباراة ذات مجموع صفري

اللاعب الأول (السطر)
الاستراتيجية الصرفة له
Max Min (أحسن الأسوأ)

اللاعب الثاني (العمود)
الاستراتيجية الصرفة له
Min Max (أي أسوأ الأحسن)
(لأنه في المباراة ذات المجموع الصفري دخل اللاعب العمودي تضرب بـ (-١) في المصفوفة الكائنة لمصفوفة الدخل (أي يكون زه = -)

مثال (1): إذا كانت مصفوفة الدفع A بالشكل $A=\begin{pmatrix}\boxed{5} & 7\\ 4 & 6\end{pmatrix}$ أوجد الاستراتيجية الصرفة:

الحل:

المصفوفة A تكافئ: $\begin{pmatrix}(5,-5) & (7,-7)\\ (4,-4) & (6,-6)\end{pmatrix}$

إذا استطاع اللاعب العمودي أن لا يدفع للعب يكون أفضل له

استراتيجية أعظم الأصغر هي $Max\,Min = Max\{5,4\} = 5$

استراتيجية أصغر الأعظم هي $Min\,Max = Min\{5,7\} = 5$

الاستراتيجية الصرفة:

أن يختار اللاعب السطري السطر الأول ويضمن ربح خمسة على الأقل

ونجعل يختار اللاعب العمودي العمود الأول ويضمن خسارة خمسة على الأكثر

(في حال انطبقت الاستراتيجية للاعب السطري والعمودي يكون لدينا نقطة توازن أي $\boxed{O}$)

مثال:

$$A=\begin{pmatrix}\boxed{0} & -2\\ -3 & 5\end{pmatrix}$$

الاستراتيجية الصرفة:

اللاعب الأول (السطري) هي $Max\,Min = Max\{-2,-3\} = -2$

اللاعب الثاني (العمودي) هي $Min\,Max = Min\{0,5\} = 0$

أي أنه الاستراتيجية الصرفة:

أن يختار اللاعب الأول (السطري) السطر الأول ويضمن أن يخسر 2 على الأكثر

″ ″ ″ الثاني (العمودي) ″ العمود الأول ″ ″ ألا يخسر شيئاً

ليس لدينا نقطة توازن:

اللاعب العمودي اختار الاستراتيجية العمود الأول ← اللاعب السطري يختار السطر الأول

اللاعب السطري ″ ″ السطر الأول ← اللاعب العمودي

سيختار العمود الثاني

الاستراتيجية المختلطة:

p احتمال اختيار اللاعب السطري السطر الأول (الاستراتيجية الأولى)

$1-p$ 〃 〃 〃 للاستراتيجية الثانية (السطر الثاني)

q احتمال اختيار اللاعب الثاني (العمودي) الاستراتيجية الأولى

$1-q$ 〃 〃 〃 〃 الثانية.

$$\begin{array}{c|cc} & q & 1-q \\ \hline p & 0 & -2 \\ 1-p & -3 & 5 \end{array}$$

حالات خاصة: اذا كان للاعب السطري n خيار فلديه p_i احتمال اختيار الاستراتيجية i حيث $0 \le p_i \le 1$ ، $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

اذا كان اللاعب العمودي n خيار فلديه q_j احتمال اختيار الاستراتيجية j حيث $0 \le q_j \le 1$ حيث $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$

$$\begin{array}{c|ccc} & q_1 & q_2 & \cdots \\ \hline p_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots \\ \vdots & & & \\ p_n & a_{n1} & & \end{array}$$

كيفية إيجاد p و q ؟!

لإيجاد p و q نوجد المقدار $\pi(p,q)$ والذي يرمز

* توقع ربح اللاعب (الأول) السطري اذا ~~[illegible]~~ اختيار اللاعب الأول للاستراتيجية الأولى (السطر الأول) باحتمال p
و اذا اختار اللاعب العمودي العمود الأول باحتمال q

** توقع خسارة اللاعب الثاني (العمودي) اذا اختار اللاعب السطري السطر الأول باحتمال p و اذا اختار اللاعب العمودي العمود الأول باحتمال q

$$\pi(p,q) = \delta(p-\alpha)(q-\beta)+\gamma \qquad \boxed{\star}$$

$$0 \le \alpha, \beta \le 1$$
احتمالات

$\delta(p-\alpha)(q-\beta)$

$\delta(pq - p\beta - \alpha q + \alpha\beta)$

$$\begin{array}{c|cc} & q & 1-q \\ p & 0 & -2 \\ 1-p & -3 & 5 \end{array} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \pi(p,q) =$$

$$\pi(p,q) = 0 \times p \times q - 2p \times (1-q) - 3(1-p)q + 5(1-p)(1-q)$$

$(1 - q - p + pq)$

$$\pi(p,q) = 2pq + 3pq - 2p - 3q - 5p - 5q + 5 + 5pq \quad (1)$$

وكذا نريدها بالشكل $\boxed{*}$

نكتب $\boxed{*}$ بالشكل [منوزع]

$$\pi(p,q) = \delta(p-\alpha)(q-\beta) + \gamma$$

$$\pi(p,q) = -\delta\beta p - \delta\alpha q + \delta pq + \delta\alpha\beta + \gamma \quad (2)$$

إذاً بالمطابقة بين (1) و (2) نجد أن

$$\left.\begin{aligned} -\delta\beta &= -7 \\ -\delta\alpha &= -8 \\ \delta &= 10 \end{aligned}\right\}$$

شرح $\Rightarrow \begin{pmatrix} -\delta\beta p = -2p - 5p \\ -\delta\beta p \quad -7p \end{pmatrix}$

$\Rightarrow -10 \times \beta = -7 \Rightarrow \beta = \dfrac{7}{10}$

$-10 \times \alpha = -8 \Rightarrow \alpha = \dfrac{8}{10}$

$\delta = 10$

بالتعويض

$$\delta\alpha\beta + \gamma = 5 \Rightarrow (10)\left(\frac{8}{10}\right)\left(\frac{7}{10}\right) + \gamma = 5 \Rightarrow \gamma = -0{,}6$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{8}{10}, \quad \beta = \frac{7}{10}, \quad \gamma = -0.6$$

$$\pi(p,q) = 10\left(p - \frac{8}{10}\right)\left(q - \frac{7}{10}\right) - 0.6$$

إذاً

Alnour

وبالتالي فإن الاستراتيجية المختلطة

أن يختار اللاعب السطري الاستراتيجية ب احتمال $\frac{8}{10}$ وبعضه أن يختار ~~...~~

بمتوسط 0.6 من الحالات. أي في كل 10 مرات لعب سيختار السطر الأول 8 مرات ؟

أن يختار اللاعب العمودي العمود الأول احتمال $\frac{7}{10}$ = q وبعضه أن يختار

بمتوسط 0.6 من الحالات

أي في كل 10 مرات لعب يختار الاستراتيجية الأولى 7 مرات ؟

منحنيات أفضل استجابة:

$R_R(q)$ = مجموعة الاستراتيجيات التي هي أفضل استجابة من أجل اللاعب السطري وذلك من أجل أي استراتيجية للاعب العمودي (من أجل q) حيث R هو الدليل للاعب السطري.

$R_C(P)$ = مجموعة الاستراتيجيات التي هي أفضل استجابة من أجل اللاعب العمودي في حسب قيمة P في حيث الدليل للاعب العمودي

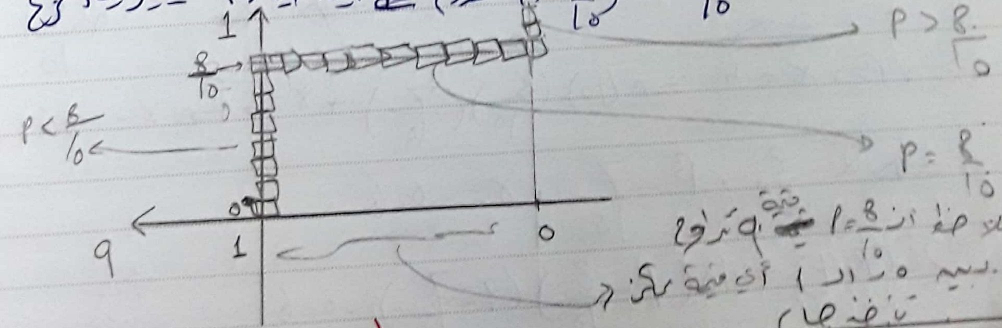
نستنتجها حسب العلاقة ♡

$P > \frac{8}{10}$: $(P-\frac{8}{10})$ موجب $\Leftarrow$ أفضل استجابة للاعب العمودي $q=0$

$P < \frac{8}{10}$ $(P-\frac{8}{10})$ سالب $\Leftarrow$ أفضل استجابة للاعب العمودي $q=1$

$P = \frac{8}{10}$ $(P-\frac{8}{10})$ معدوم $\Leftarrow$ أي اختيار لـ q لن يغير قيمة الربح

$R_C(P)$



نلاحظ أن $P = \frac{8}{10}$ فإن q تتراوح بين 0 إلى 1 أي قيمة يمكن أن تأخذها

The end