المحاضرة الأولى

/ /

سنبدأ دراسة مقرر «تطبيقات نظرية الفئات ٢»
الدكتور حمزة الحاكمي.

المجموعة: هي تجمع لأشياء تشترك بصفة معينة (العناصر التي تنتمي أو لا تنتمي)
لنكن U تجمع كل المجموعات. لنأخذ:

$$B = \{A \in U : A \notin A\}$$

هل B تنتمي لنفسها؟!

إذا كانت ① مرفوض $B \in B \Longrightarrow B \notin B$

② مرفوض $B \notin B \Longrightarrow B \in B$ *

مجموعة
صف

وهذا ما ندعوه تناقض راسل Russell's paradox
ومنه U ليست مجموعة ⟸ U صف

الصف: هو شيء أكبر من مجموعة. أي كل مجموعة هي صف ولكن ليس كل صف مجموعة

الشرح: بالنسبة للصف نفس المناقشة السابقة (*) لكن هنا على الصفوف ولا نحصل على صف ذاتي كل الصفوف (هي ليست صف (أي U ليست صف) فنحصل على شيء أكبر منه سنسميه تكتل وهذا يستمر إلى ∞ .

#

الصف: أكبر من المجموعة نتعامل معه من حيث الصفوف الجزئية
التطبيقات - اجتماع وتقاطع الصفوف الجزئية إضافة إلى التعامل مع المجموعات

سنتعامل مع الصفوف من حيث أننا نستطيع من أجل كل خاصة على العناصر يمكن عزل صف جزئي
مثال: صف مجموعات غير قابلة للعد وصف مجموعات قابلة للعد.

الفئة: هي عبارة عن صفين
→ صف أشياء.
↙ صف مورفيزمات

/ /

تعريف: نقول أنه توجد لدينا فئة $\mathcal{L}$ إذا وجد:

(1) صنف أشياء $ob(\mathcal{L})$: نرمز لعناصره بأحرف كبيرة $A, B, \ldots \in ob(\mathcal{L})$

وتسمى أشياء الفئة $\mathcal{L}$.

(2) - صنف مورفيزمات $Mor(\mathcal{L})$: وعناصره عبارة عن أسهم بين الأشياء،

$$A \longrightarrow B$$

مورفيزم تعميم للتطبيقات.

نرمز للأسهم بين A و B بالشكل:

$$\mathcal{L}(A,B) = Hom(A,B)$$

الجهة من A إلى B .

حيث أن الأسهم $\mathcal{L}(A,B)$ تشكل مجموعة

(يجب أن تشكل مجموعة لا لزم الأسهم) إذا لم يوجد سهم فإن هذه المجموعة خالية.

(1) و (2) تحققان معاً الشروط الآتية:

1- أياً كان $A, B, D \in ob(\mathcal{L})$ يوجد تطبيق:

$$\mu : \mathcal{L}(A,B) \times \mathcal{L}(B,D) \longrightarrow \mathcal{L}(A,D)$$

معرف بالشكل:

$$\mu(f,g) = g\cdot f = g\circ f$$

(تقرأ g بعد f)

تسمى العملية (.) تركيب مورفيزمات:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\cdot f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & D \end{tikzcd}$$

2- عملية تركيب المورفيزمات تجميعية:

- التجميعية هي تعميم للتعامل مع ثلاث عناصر

تعامل مع عنصرين.

أما أكثر من ثلاث عناصر (لا استفادة رياضياً)

$$\cdot : A\times A \longrightarrow A$$

$$(a,b) \longrightarrow a\cdot b$$

صنع الحضارة

/ /

عملية تركيب المورفيزمات تجميعية :

$$\forall f,g,h \in Mor(\mathcal{L}):$$
$$(f.g).h = f.(g.h)$$
حيث التركيب معرف.

3- أياً كان $A \in ob(\mathcal{L})$ يوجد المورفيزم المطابق :

$$I_A : A \longrightarrow A$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "I_A"] \arrow[dr, "f"] & A \arrow[d, "f"] \\
D \arrow[u, "g"] \arrow[ur, "g"] & B
\end{tikzcd}$$

ويحقق من أجل كل $f : A \longrightarrow B$ فإنه :
$$f.I_A = f$$
(محايد من اليمين)

ومن أجل كل $g : D \longrightarrow A$ فإنه :
$$I_A.g = g$$
(محايد من اليسار)

4) (متى تختلف مورفيزمان ؟)) تدعو هذا الشرط بشرط اختلاف مورفيزمين.
أياً كان $A, B, A', B' \in ob(\mathcal{L})$ بحيث :
$$(A,B) \neq (A',B')$$
فإنه : $\mathcal{L}(A,B) \cap \mathcal{L}(A',B') = \emptyset$

أمثلة : 1- فئة المجموعات 2- فئة الزمر، أشياؤها هي زمر
والمورفيزمات هي التشاكلات الزمرية : تركيب تشاكلين هو تشاكل زمري
زمرية

3) فئة المودولات : أشياؤها مودولات يمينية مورفيزماتها هي تشاكلات مودولية.
4) فئة الفضاءات الشعاعية 5) فئة الفضاءات التبولوجية
6) فئة الفضاءات المترية 7) فئة الحلقات
8) فئة الزمر التبديلية 9) فئة المودولات الأفقية
10) فئة المودولات الإسقاطية 11)
فئة المجموعات مع العلاقات (الجداء الديكارتي)، فئة المجموعات المرتبة : مورفيزماتها
هي العلاقات التي تحافظ على علاقة الترتيب

الفئة وحيدة الشيء

مؤلفة من شيء X وحيث مورفيزماته هو المطابقة

على الأقل $I_X : X \longrightarrow X$

* متى نقول انه I_X موجود ?!

يكفي ان توجد علاقة انعكاسية ⟸ نقول أن (I_X) موجود.

انتهت المحاضرة (1) #