12-3-2018

◄ دكتور المادة: غصون الجيرودي

نظري

◄ المحاضرة الأولى عنوان المحاضرة: مبادئ العد والعينات المرتبة

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي في المحاضرة الأولى من مقررنا الرياضيات المتقطعة

سنتناول في هذه المحاضرة طرائق ومبادئ العد – العينات المرتبة

مقدمة : إن الرياضيات المتقطعة فرع من فروع الرياضيات و يهتم بدراسة مسائل تتعلق بمجموعات متقطعة (قابلة للعد)مثل المسائل التي تكون فيها المتغيرات تأخذ قيماً متقطعة أي قيماً قابلة للعد .
و يندرج ضمنها كلاً من الفروع التالية : نظرية الأعداد – نظرية الاحتمالات – طرق العد – جبر المنطق – نظرية البيان – الخوارزميات .....

أولاً) طرائق العد : معظم مسائل العد تؤول إلى إحدى المسائل التالية :

1-مقارنة مجموعة بمجموعة أخرى عُلمتْ عدتها .

2- حساب عدد عناصر مجموعة ناتجة عن اجتماع عدد من المجموعات .

3-حساب عناصر الجداء الديكارتي لعدة مجموعات .

تعريف قدرة مجموعة :نعرف قدرة مجموعة منتهية بأنها عدد عناصرها ويرمز لها بـ
$|A| = Card(A)$

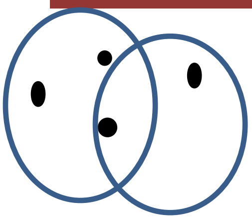
ثانياً) مبادئ العد :

مبدأ العد الأول :إذا وجد تقابل بين مجموعتين A, B(تطبيق متباين وغامر $f: A \to B$)عندها سيكون
$card\ A = cardB$

مبدأ العد الثاني :إذا وجدت $(A_1, A_2, \dots \dots \dots A_n)$ مجموعات منفصلة مثنى مثنى أي $(A_i \cap A_j = \emptyset : i \neq j)$ عندها عدد عناصر الاجتماع يكون :

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots . \cup A_n| = \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

لكن ماذا إذا لم تكن منفصلة وتقاطعت بعنصر أو أكثر؟.

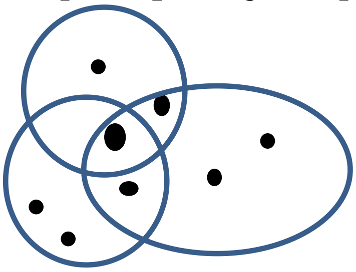


إذا تقاطعت مجموعتين A_1, A_2 غير منفصلتين يتقاطعان بعنصر واحد على الأقل فيكون:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

إذا تقاطعت ثلاث مجموعات : A_1, A_2, A_3 ثلاث مجموعات غير منفصلة عندها

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$



مبدأ العد الثالث: إذا كانت $A_1, A_2, \dots\dots, A_n$ مجموعات منتهية فعدة الجداء الديكارتي لها:

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \times |A_2| .. |A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$$

حيث: $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(x_1, x_2, .., x_n) : x_i \in A_i\}$

أمثلة :

1-في تجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية يُحسب عدد النتائج الممكنة حسب المبدأ الثالث للعد حيث أن مجموعة الحالات الممكنة للرمية الواحدة هو إما كتابة أو صورة $A = \{H, T\}$ و عليه تكون مجموعة الحالات الممكنة في التجربة هي : $A \times A \times A$ و عدد النتائج الممكنة :

$$|A \times A \times A| = |A| \times |A| \times |A| = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

2-نريد تصنيف مجموعة من الأشخاص وفقاً **لحالتهم المدنية** و **لجنسهم** و **لمهنهم** (إذا كان هناك 20مهنة)

لنرمز بـ A لمجموعة الحالات مدنية $A = \{$أعزب, متزوج$\}$ فيكون $|A| = 2$

لنرمز بـ B لمجموعة الحالات الممكنة للجنس $B = \{$أنثى, ذكر$\}$ فيكون $|B| = 2$

و لنرمز بـ C لمجموعة المهن $|C| = 20$

ومنه عدد الأصناف الممكنة حسب المبدأ الثالث للعد:

$$|A \times B \times C| = |A| \times |B| \times |C| = 2 \times 2 \times 20 = 80$$

3- ليكن a عدد طبيعي قواسمه الأولية $(d_1, d_2, \dots, d_k)$ وأنّ $a = d_1^{m_1} \times d_2^{m_2} \times \dots \times d_k^{m_k}$

فتكون قواسم العدد a: $(m_1 + 1) \times (m_2 + 1) \times \dots . \times (m_k + 1)$

كمثال لدينا العدد $a = 72 = 2^3 \times 3^2$ تكون قواسمه بالشكل :

$2^3 \times 3^0$	$2^2 \times 3^0$	$2^1 \times 3^0$	$2^0 \times 3^0$
$2^3 \times 3^1$	$2^2 \times 3^1$	$2^1 \times 3^1$	$2^0 \times 3^1$
$2^3 \times 3^2$	$2^2 \times 3^2$	$2^1 \times 3^2$	$2^0 \times 3^2$

$\Leftarrow$عدد قواسمه $(3 + 1) \times (2 + 1) = 12$

مثال :أوجد عدد قواسم العدد 2520 :

$$2520 = 2^3 \times 3^3 \times 5^1 \times 7^1$$

قاسم$\Rightarrow$ عدد قواسمه $= (3 + 1) \times (3 + 1) \times (1 + 1) \times (1 + 1) = 64$

ثالثا)العينات المرتبة: إذا كانت A مجموعة منتهية غير خالية عدتها n وكان r عدد طبيعي غير صفري كل عنصر $(x_1, x_2, .., x_r)$ من A^r يدعى عينة مرتبة من A حجمها r وقد رأينا أن عدد العينات يساوي $|A| \times |A| \times .. \times |A| = |A|^r$

لكن لا بد أن نميز حالتين :

1-أن نعيد إلى A كل عنصر أخذناه بعد تسجيله فيكون: $|A|^r = n^r$

2-ألا نعيد العنصر الذي أخذناه من A فيكون عددها: $n(n-1) \dots (n-r+1)$

مثال :صندوق فيه عشر كرات مرقمة من 1 لل 10 ونريد سحب ثلاث كرات :

اذا كان السحب مع الإعادة فعدد العينات: $10 \times 10 \times 10 = 10^3$

اذا كان السحب دون إعادة فعدد العينات: $10 \times 9 \times 8 = 720$

انتهت المحاضرة

إعداد: سماح علوان & سندس درويش& نذير تيناوي