نظري

◄ دكتور المادة: جبران جبران

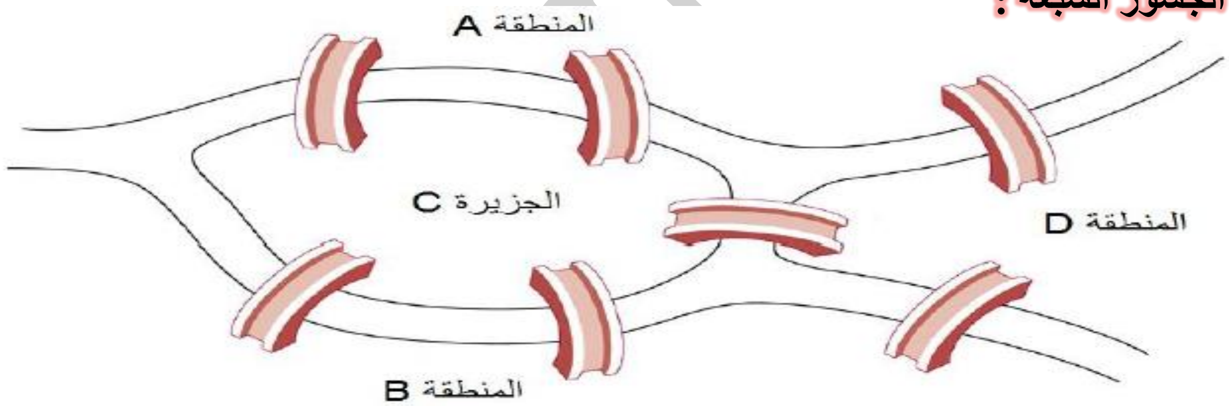
◄ المحاضرة : الأولى   عنوان المحاضرة : تعريف البيان

مقدمة .... تعد نظرية البيان (Graph theory) الأفضل في استكشاف طرق البرهان في الرياضيات المتقطعة ، فضلاً عن أن كثيراً من التطبيقات في العديد من النواحي الحسابية والاجتماعية والعلوم الطبيعية يستند إلى نتائجها

كما أن نظرية البيان تعد من العلم الحديث نسبياً ، حيث ظهرت في بداية القرن الثامن عشر ، ويعود الفضل في ظهورها إلى عالم الرياضيات السويسري ليونارد أولر حيث قام بتقديم أقدم وثيقة في نظرية البيان في عام 1763 م ، وهذه الوثيقة تعرف بمسألة الجسور السبعة لمدينة كونغ سبرنغ ، حيث ظهرت في البداية نظرية البيان بوصفها أداة كل الأحاجي والألعاب .

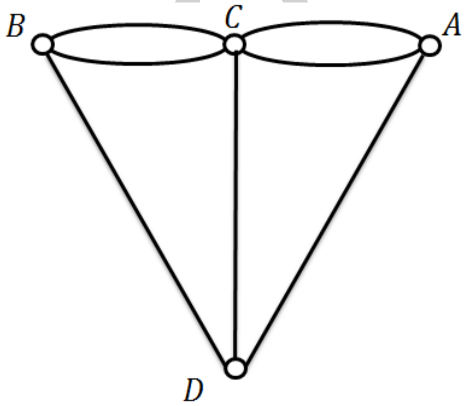
كما استخدمت نظرية البيان لحل معظم المسائل من أشهرها

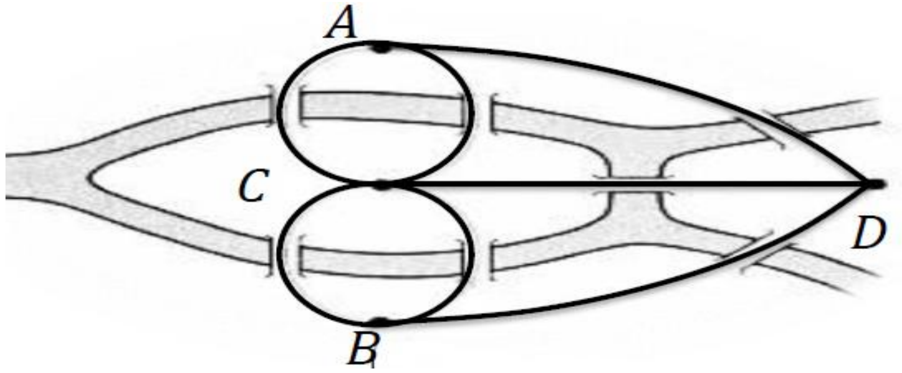
مسألة الجسور السبعة :



هل نستطيع التجوال في هذه الجسور السبعة دون أن نمر على الجسر مرتين ؟؟

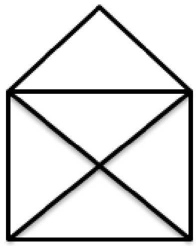
حاول العالم أويلر حل هذه المسألة لمدة 11 عاماً لكن دون جدوى ، فحاول أويلر أن يرسم نموذجاً لهذه المسألة ، فكانت الرسمة كالآتي :





حيث أطلق على كل يابسة (منطقة) اسم عقدة ورمز لها $\{A, B, C, D\}$ ، وعبر عن الجسور بأضلاع واصلة بين العقد ، وبما أنه بين المنطقة A والمنطقة C جسران يصلان بينهما فَرَسَمَ ضلعين ، وبالمثل للمنطقتين C و B وكذلك الامر للمنطقة D حيث تصل المناطق الثلاث ببعضها .
ثم قام بنشر هذه المسألة في الصحف وقال :

هل يمكن التجول على كامل العُقد دون المرور على العقد أكثر من مرة ؟؟



وظهر على أثر هذه المسألة العديد من المسائل والألعاب على نمط المسألة السابقة

ومن هذه المسائل ....

هل يمكن رسم الشكل التالي بخط واحد دون رفع القلم أو تكرار أي خط مرة آخرى ؟

مسألة الألوان الأربعة :

وهي من المسائل القديمة في البيان ، كان قد طرحها الطالب فريدريك كوثري على العالم دي مورغان عام 1852 م وقد كانت تنص على ما يلي :

((هل صحيح أن أي خارطة يمكن تلوينها بأربعة ألوان بحيث أي دولتين متجاورتين لها ألوان مختلفة ؟))

بقيت المسألة دون برهان قرابة قرن وأكثر ، قدم المُحامي كيمب حلاً إيجابياً للمسألة وقد كُرّمَ على حله ، حيث انتخب رئيساً للأكاديمية الرياضية في لندن ، لكن في عام 1890 م أثبتَ هاود أن إثبات كيمب خاطئ ، كما تعد مسألة الألوان الأربعة من أهم مسائل البيان لأنها كانت خطوة كبيرة، كما قادت إلى دِراسة في تلوين البيان وأنواع جديدة في الدراسات

بعض من تطبيقات البيان الحديثة

1) **في مجالات الطب والصيدلة :** لدراسة آلية انتشار الفيروسات وغيرها.

2) **في مجال البيولوجيا :** حيث استخدم في الورثة الجينية للحصول على نتائج أفضل .

3) **في مجال الحواسيب :** حيث استخدمت في تصميم لوحات الأم والدارات المتكاملة الحديثة للحواسيب كما تستخدم في تصميم الشبكات الحاسوبية وشبكات التواصل الاجتماعي والبرامج المعقدة ، ومنه فإن البيان قادر على تمثيل أي مشكلة ببساطة ليدرس المبرمج المشكلة بتجرد ((حيث قبل كتابة أي برنامج يجب وضع تصور له)) ، ثم يبدأ بإيجاد حل برمجي باستخدام الحاسوب .

4) **في العالم الحقيقي :** قد تكون هذه العقد مُدناً والأضلاع هي طرق بينها .وأخيراً نختم مقدمتنا عن المقرر وأهميته بفائدة البيان في مجالنا ....

5) **في مجال الرياضيات :** البيان هو بنية بسيطة تتكون من عقد وأضلاع ، عادةً ما تُمثل العقد عناصر المسألة وتكون الأضلاع هي العلاقة بين هذه العناصر .

والآن أصدقائي أهلاً بكم في مقررنا الممتع حيث سنقوم بتغطية المقرر معاً ، وسنحاول عرضه بشكل مبسط وواضح . . . . آملين من الله التوفيق لنا ولكم .

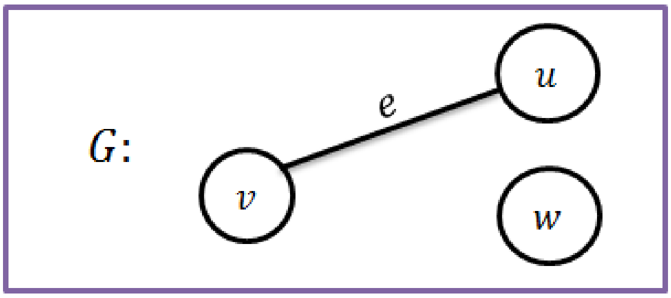
تعاريف ومفاهيم أساسية

تعريف البيان : هو عبارة عن مجموعتين ، الأولى هي مجموعة من العقد V $(Vertices)$، والثانية هي مجموعة من الأضلاع E $(Edge)$ ، ونسمي الثنائية المرتبة $G(V,E)$ بياناً ، حيث أن :

$$V = \{v_1, v_2 \ldots\ldots, v_n\} \quad , \quad E = \{e_1, e_1 \ldots \ldots, e_n\}$$

علماً أن كل ضلع يربط بين عقدتين من عقد البيان .

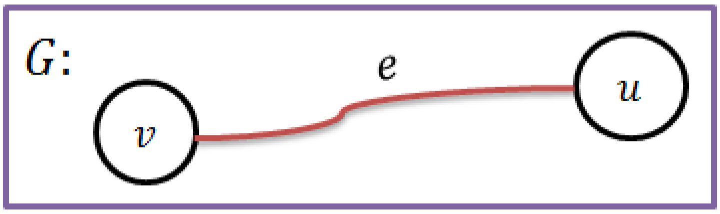
مثال للتوضيح :



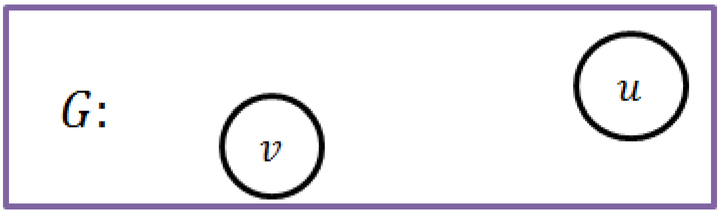
$$V(G) = \{u, v, w\} \quad , \quad E(G) = \{u, v\}$$

إن uv ضلع من E ويمكن أن يرمز له e أي أن $e = uv$ ((الترتيب لا يهم))

ليس بالضرورة أن يكون الضلع الواصل بين u, v مستقيم أي يمكن أن يكون :



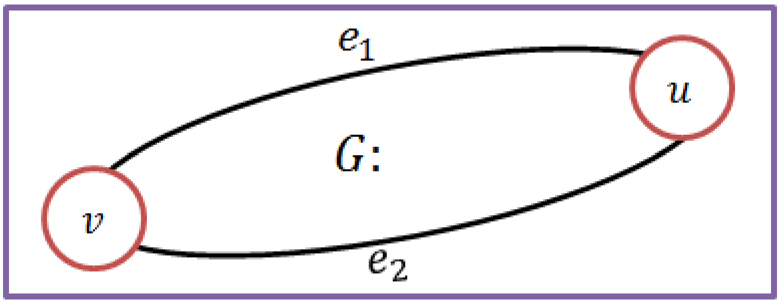
مثال عن بيان تافه :



$$V(G) = \{u, v\} \quad , \quad E(G) = \emptyset$$

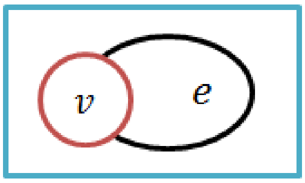
مما سبق نستطيع تعريف الضلع بأنه الخط الذي يصل بين رأسين في البيان G

البيان المضاعف (الأضلاع المضاعفة) : هي مجموعة الأضلاع التي تربط بين نفس العقدتين .

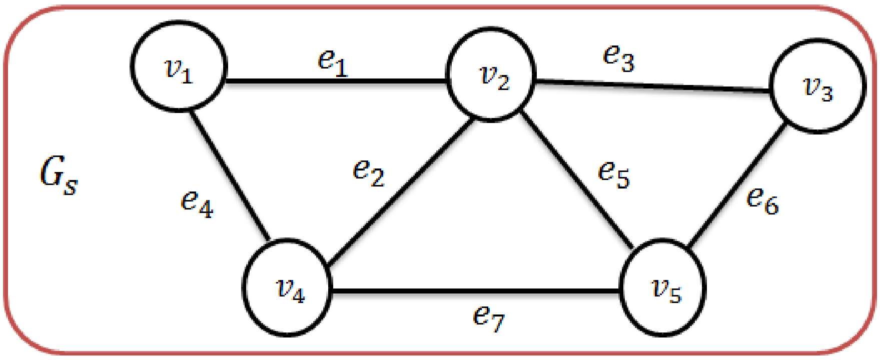


العُروة : هي عبارة عن ضلع يربط العقدة بنفسها .

تكتب رياضياً : $e = (v, v)$



البيان البسيط : هو البيان الذي لا يحوي على عُرى ولا على أضلاع مضاعفة .

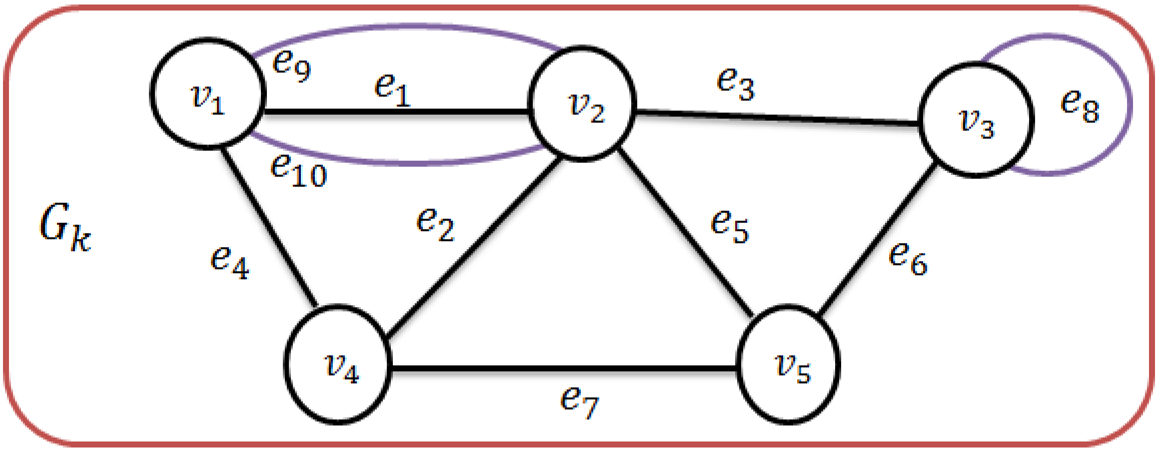


$G_s = (V, E)$

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$

إن البيان G_k غير بسيط ((لأنه يحوي على عُرى وأضلاع مضاعفة))



الأضلاع المضاعفة هي $e_1, e_9, e_{10} = (v_1, v_2)$ والعروة هي $e_8 = (v_3, v_3)$

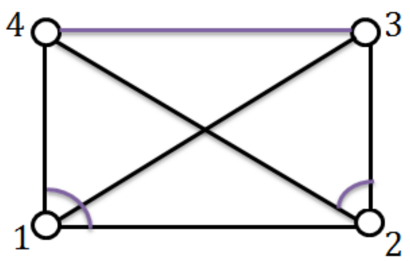
ميزات البيان

ندعو عدد رؤوس البيان G بمرتبة البيان ونرمز لها بـ p و $|V|$ قدرة الرؤوس بحيث $p = |V|$
وندعو عدد أضلاع البيان G بحجمه ونرمز لها بـ q و $|E|$ قدرة الأضلاع بحيث $q = |E|$

حيث يقصد بـ $\underbrace{|E|}_{\text{عدد الأضلاع}} = \{e_1, e_2 \dots \dots, e_n\}$ ، $\underbrace{|V|}_{\text{عدد العقد}} = \{v_1, v_2 \dots \dots, v_n\}$

إذاً نقول عن البيان $G(p,q)$ بحيث p عدد عقد الرؤوس و q عدد الأضلاع
إذا كان لدينا عدد الرؤوس p كم هو عدد الأضلاع ؟
لحساب عدد الأضلاع نستخدم القانون التالي : $q \leq \frac{p(p-1)}{2}$ عدد الأضلاع بدون تكرار .

$$\text{عدد الأضلاع} = \underbrace{(p-1)}_{v_1} + \underbrace{(p-2)}_{v_2} + \underbrace{(p-3)}_{v_3} + \cdots + \underbrace{1}_{v_{n-1}}$$



مثال : ليكن لدينا بيان مكون من 4 نقط كم هو عدد أضلاع البيان ؟
نقوم بعّد الأضلاع عند كل عقدة دون تكرار للأضلاع
أي عدد الأضلاع هو $3 + 2 + 1 = 6$

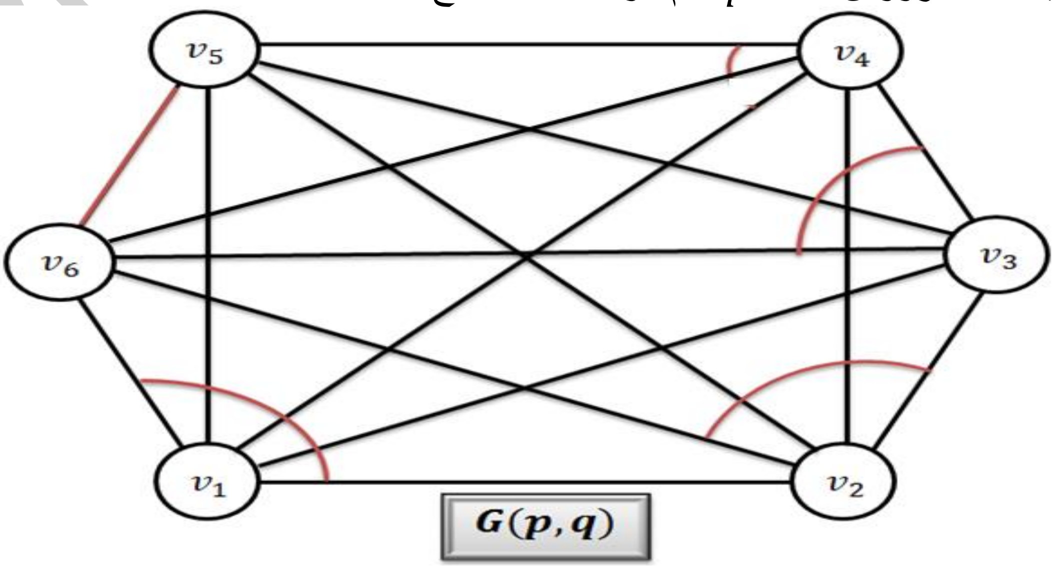
ملاحظة : عند العقدة (1) يخرج منها ثلاث أضلاع والعقدة (2) يخرج منها ضلعين دون حساب الضلع التي تشترك مع العقدة (1) وعند العقدة (3) يخرج منها ضلع واحد دون حساب الأضلاع المشتركة مع العقد ، أما العقدة (4) لا يوجد فيها أي ضلع لأن جميع أضلاعها مشتركة مع العقد السابقة .

بإمكاننا أن نحسب الأضلاع من القانون التالي :

$$q = \frac{p(p-1)}{2} \Longrightarrow q = \frac{4(4-1)}{2} = \frac{(4\times3)}{2} = 6$$

" مثال خارجي لتوضيح الفكرة السابقة "

إذا كان لدينا عدد الرؤوس $p = 6$ كم هو عدد الأضلاع ؟



$$|E| = \underbrace{(p-1)}_{v_1} + \underbrace{(p-2)}_{v_2} + \underbrace{(p-3)}_{v_3} + \underbrace{(p-4)}_{v_4} + \underbrace{(p-5)}_{v_5} + \underbrace{(p-6)}_{v_6}$$

$$q = |E| = 5+4+3+2+1+0 = 15$$

أو نطبق القانون السابق :

$$q = \frac{p(p-1)}{2} \Longrightarrow q = \frac{6(6-1)}{2} = \frac{(6\times5)}{2} = 15$$

تعريف درجة (عقدة) الرأس

ليكن لدينا $G(p,q)$ وليكن $v \in V$ ونعرف جوار الرأس v بأنه :

$$N(v) = \{v \in V \quad ; \quad v_1v_2 \in E\}$$

لكل رأس له جوار هو الجوار المتصل فيه ، ونرمز لدرجة الرأس v بـ $\deg v$

تمثل $N(v)$ عدد عناصر الجوار بحيث قدرة (درجة) مجموعة تساوي $\deg v = |N(v)|$

درجة الرأس $0 \le \deg v \le p-1$

نقول عن v أنه زوجي أو فردي حسب درجته (قدرته) ، فيما إذا كانت زوجية أو فردية
فإذا كانت $\deg v = 0$ ((أي لم يؤثر على العقدة v أي ضلع من البيان G فندعو v برأس منعزل و هو زوجي))

أما إذا كان $\deg v = 1$ ندعو v برأس طرفي ((و هو فردي))

نظرية (1): ليكن G بيان من المرتبة p والحجم q ولدينا مجموعة العقد

$$V(G) = \{v_1, v_2 \dots \dots, v_p\}$$

عندئذٍ : $\sum_{i=1}^{p} \deg v_i = \deg v_1 + \deg v_2 \dots \dots \dots \deg v_p = 2q$

الإثبات : عند الجمع على درجات الرؤوس نكون قد جمعنا الأضلاع مرتين .

بمعنى آخر :

كل ضلع يؤثر على عقدتين وبالتالي عندما نجمع قدرات العقد (درجات الرؤوس) فإننا نجمع كل ضلع مرتين وبالتالي فإن :

$$\sum_{i=1}^{p} \deg v_i = 2q$$

النظرية (2) >> كل بيان $G(p,q)$ يحوي على عدد زوجي من الرؤوس ذات الدرجات الفردية >> .

البرهان : لنفرض أن V_1 مجموعة الرؤوس الفردية و V_0 مجموعة الرؤوس الزوجية

وحسب النظرية السابقة التي تنص " على أن اي ضلع يؤثر على عقدتين " أي :

$$\sum_{v \in V} \deg v = 2q$$

نَقسِم $\sum_{v \in V} \deg v$ إلى قسمين :

$$\sum_{v \in V_1} \deg v_1 + \sum_{v \in V_0} \deg v_0 = 2q$$

$$\Rightarrow \sum_{v \in V_1} \deg v_1 = 2q - \sum_{v \in V_0} \deg v_0$$

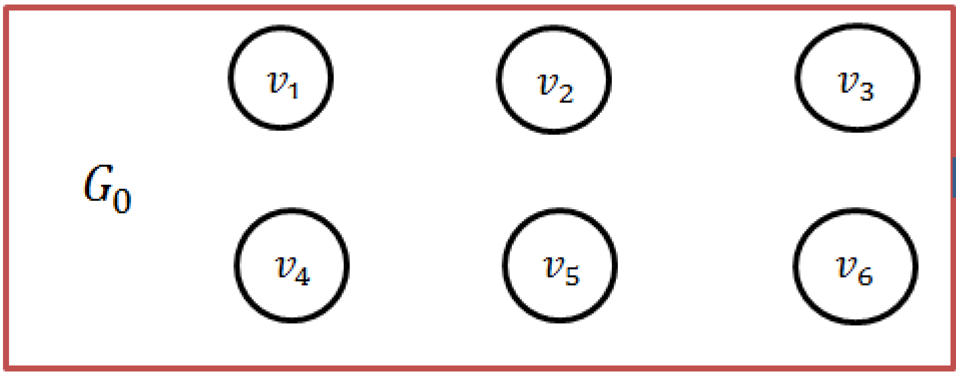
بما أن العدد $\sum_{v \in V_0} \deg v_0$ عدد زوجي وكذلك $2q$ عدد زوجي فإن $\sum_{v \in V_1} \deg v_1$ هو عدد زوجي .

تم المطلوب . ((طرح عددين زوجيين هو عدد زوجي))

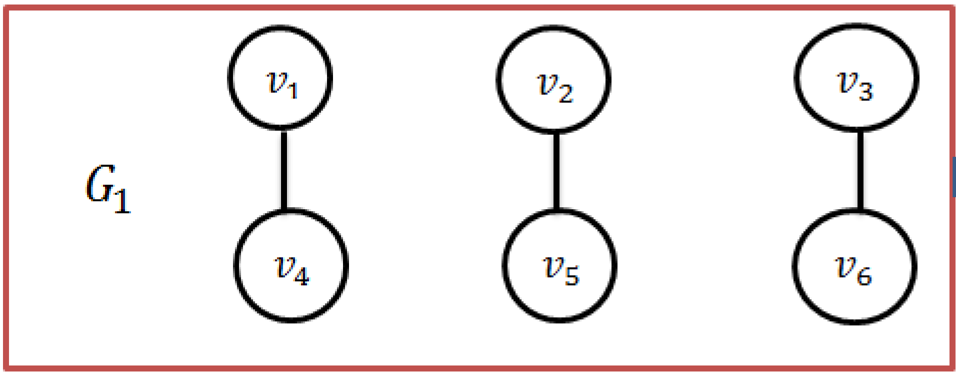
البيان المنتظم

نقول عن البيان G أنه بيان منتظم من الدرجة r بحيث $r \geq 0$ إذا كانت درجة كل رأس من رؤوسه تساوي r حيث : $0 \leq r \leq p-1$

أمثلة عن البيانات المنتظمة :

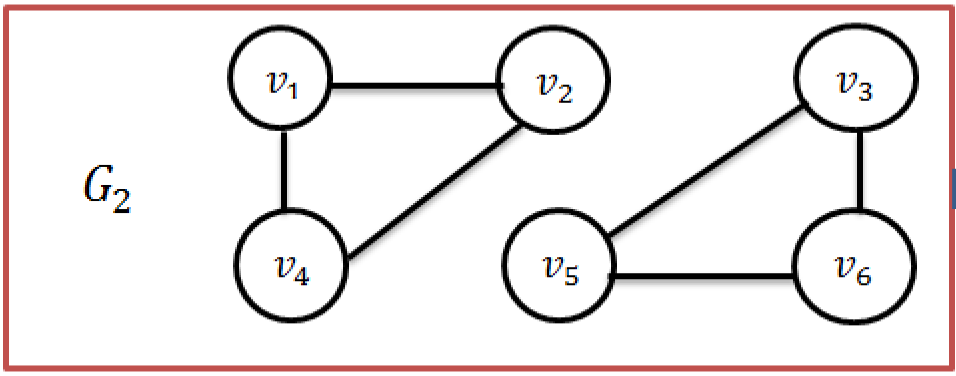


إن البيان G_0 عدد رؤوسه $p = 6$ منتظم من الدرجة 0



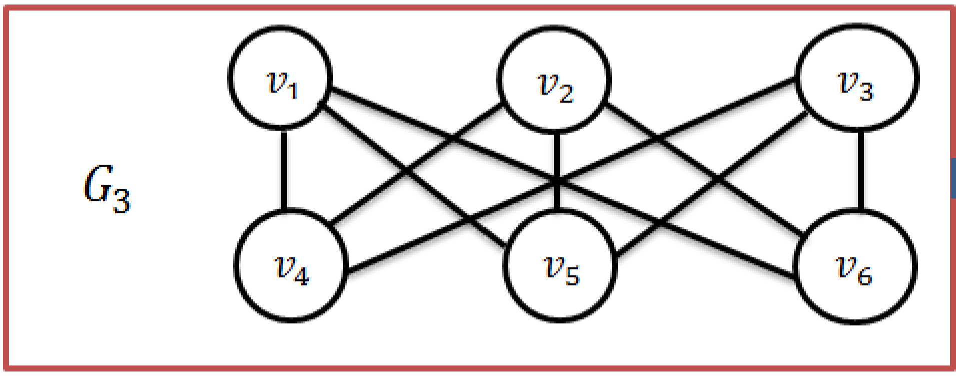
إن البيان G_1 عدد رؤوسه $p = 6$ منتظم من الدرجة 1

" كل رأس يخرج منه ضلع "



إن البيان G_2 عدد رؤوسه $p = 6$ منتظم من الدرجة 2

" كل رأس يخرج منه ضلعين "



إن البيان G_3 عدد رؤوسه $p = 6$ منتظم من الدرجة 3

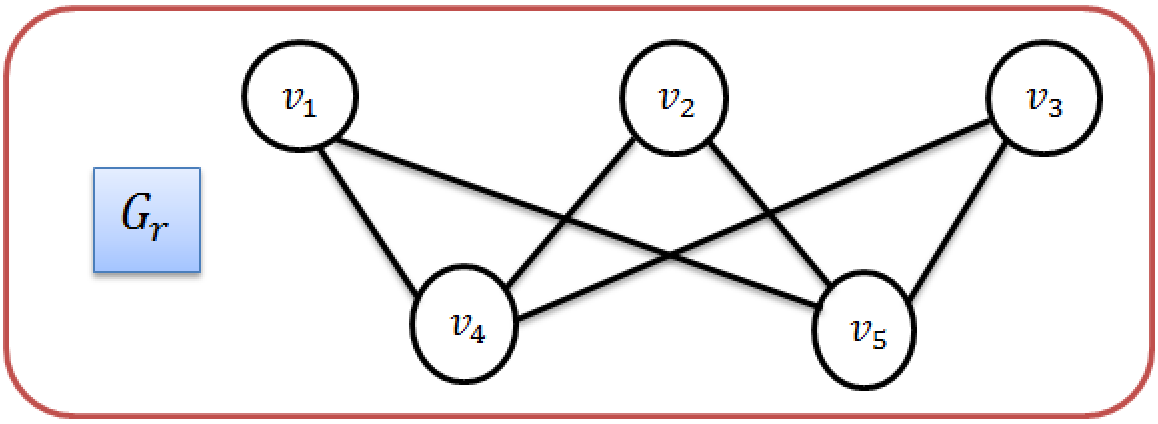
" كل رأس يخرج منه 3 أضلاع "

سؤال : **هل يوجد بيان منتظم من الدرجة 3 وعدد رؤوسه 5 ؟؟**

الجواب : لا وذلك حسب مبرهنة ((لأن الرؤوس ذات الدرجة الفردية يجب أن يكون عددها زوجي)).

إن البيان السابق G_2 هو بيان منتظم رؤوسه فردية (3) ودرجته (2)

- **مثال :** لنأخذ البيان G_r ذات الرؤوس الفردية .



نلاحظ أن كل من الرؤوس $\{v_1 v_2, v_3\}$ درجتها 2 وذلك لأن كل رأس يصله ضلعين
بينما الرأسين $\{v_4, v_5\}$ درجتهم 3 لأنه كل رأس يصله 3 أضلاع .
((أي لا يوجد بيان عدد رؤوسه 5 منتظم من الدرجة 3)) حتماً سيوجد تفاوت بدرجات الرؤوس .

ملاحظة : لمعرفة عدد الأضلاع نطبق النظرية (1) وذلك من خلال حساب مجموع درجات الرؤوس وتقسيمهم على 2 .

مجموع درجات البيان G_r هو $\sum_{i=1}^{5} \deg v_i$ وعدد الأضلاع هو q

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{5} \deg v_i = 2q}_{\text{حسب النظرية1}} \Rightarrow \boxed{q = \frac{\sum_{i=1}^{5} \deg v_i}{2} \dots (*)}$$

لنحسب مجموع الدرجات أولاً

$$\sum_{i=1}^{5} \deg v_i = \deg v_1 + \deg v_2 + \deg v_3 + \deg v_4 + \deg v_5 = 12$$

بالتعويض بالعلاقة $(*)$:

$$\boxed{q = \frac{12}{2} = 6}$$

سؤال آخر : برهن أن كل بيان من المرتبة $n \geq 2$ يملك على الأقل رأسين لهما نفس الدرجة .

البرهان : بفرض أن كل درجات رؤوس البيان متباينة ((مختلفة مثنى مثنى))

<أي نفرض جدلاً أنه أي لا يوجد عقدتين لهما نفس الدرجة >

وليكن : $v_1, v_2, \dots\dots, v_p$ هي المجموعة V ودرجات رؤوس البيان المرتبة تصاعدياً هي

$\deg v_1 , \deg v_2 \ , \dots\dots , \deg v_p$

ولدينا : $0 \leq \deg v \leq p-1$ إذا أخذنا عقد مختلفة مثنى مثنى فإن درجات الرؤوس هي :

$0 , 1 , 2, \dots\dots p-1$ وهذا تناقض ((لأن الرأس الذي درجته $p-1$ يتصل بجميع الرؤوس حتى الرأس الذي درجته 0)) وهذا ايضاً تناقض لأن الرأس الذي درجته 0 لا يتصل بأي رأس .

تنويه هذه الفقرة لم تعطى لكن الدكتور ذكر البيان الموجه فوجب التنويه عنه ^_^

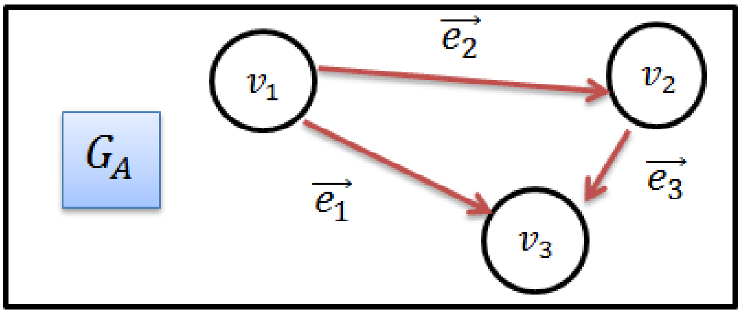
عندما نقول بيان نقصد به البيان البسيط إلا إذا ذكر لنا غير ذلك .

هناك نوع آخر من البيان وهو **البيان المُوجه**

تعريفه : هو بيان زودت أضلاعهُ باتجاهات ، والأضلاع الموجه هي عبارة عن أقواس

وبذلك يصبح الضلع عبارة عن قوس له عقدة بداية وعقدة نهاية . ويرمز له $\vec{G} = (V, \vec{E})$

- يمكن للبيان أن يكون موجهاً حتى وإن لم يكون بسيط ، كما أنه تستخدم في تخطيط الطرق والمواصلات في المدن .



$$\vec{e_1} = (\underbrace{v_1}_{\text{البداية}} , \underbrace{v_3}_{\text{النهاية}})$$

المتتالية الدرجية

ليكن G بيان و $V(G)=\{v_1,v_2,\dots\dots v_p\}$ وندعو المتتالية التالية :

$$\deg v_1 \ ,\deg v_2 \ ,\dots\dots,\deg v_p$$

متتالية درجية بحيث : $0\le \deg v \le p-1$

تعريف : نقول عن المتتالية S من الأعداد الصحيحة غير سالبة أنها متتالية بيانية إذا وجد بيان G ومتتالية درجية هي S .

انتهت المحاضرة

" مثال خارجي "

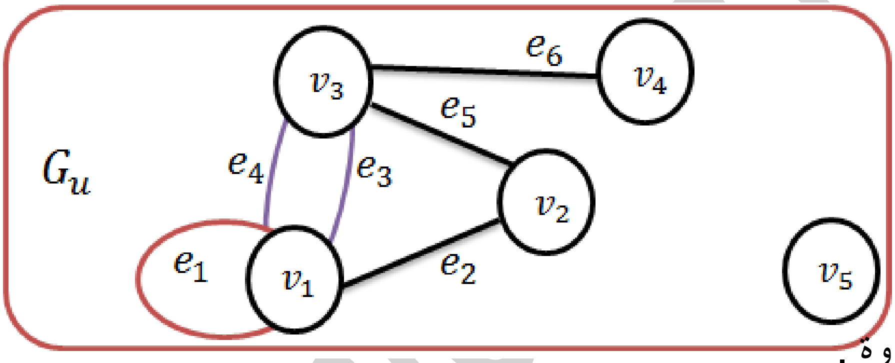
ليكن $G=(V,E)$ بياناً معرفاً كما يلي: $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}\ ,E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\}$ ومعرف بالجدول التالي :

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
(v_1,v_1)	(v_1,v_2)	(v_1,v_3)	(v_1,v_3)	(v_2,v_3)	(v_3,v_4)

1) أوجد تمثيلاً للبيان G_u .

2) أوجد الأضلاع المضاعفة والعُرى .

3) هل البيان بسيط ؟



نلاحظ أن $e_3=e_4=(v_1,v_3)$
أي أن e_3,e_4 أضلاع مضاعفة .
وبما أن $e_1=(v_1,v_1)$ فإن e_1 هي عروة .

ومنه فإن البيان G_u ليس بسيط لأنه يحوي على أضلاع مضاعفة وعُرى .

قرأت في تسعين موضعاً من القرآن أن الله قدر الأرزاق و ضمنها لخلقه ، و قرأت في موضع واحد : الشيطان يعدكم الفقر ... فشككنا في قول الصادق في تسعين موضعاً و صدقنا قول الكاذب في موضع واحد .

إعداد : محمد علي فليون ** فطوم مرعي