◄ دكتور المادة : أحمد هايل

◄ المحاضرة : الرابعة ◄ عنوان المحاضرة : حل تمارين

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

تمارين عن تابع المسافة والكرة المفتوحة والمتتاليات .

◄تمرين 1: ليكن $(x\,,d)$ فضاء متري . أثبت أن $D=min\{1,d(x\,,y)\}$ تابع مسافة على x .

الـحـل

لنحقق من الشروط : $\forall x,y,z\in X$

1) $D=min\{1,d(x\,,y)\}$ ، القيمة الدنيا لمقادير غير سالبة هو مقدار غير سالب .

2) $D(x\,,y)=0\Rightarrow min\{1\,,d(x\,,y)\}=0\Rightarrow d(x\,,y)=0\ \Rightarrow x=y$

>> أي أن أصغر العددين 1 أو $d(x\,,y)$ يساوي الصفر ، وحتما $0\neq 1$ فإن $d(x\,,y)=0$ وبما أن d تابع مسافة فإن $x=y$ <<

3) $D(x\,,y)=min\{1\,,d(x\,,y)\}=min\{\,1,d(y\,,x)\}=D(y\,,x)$

4) **لنثبت أن :** $D(x\,,z)\leq D(x\,,y)+\ D(y\,,z)$

$$min\{\,1\,,d(x,z)\}\leq min\{1,d(x,y)\}+min\{1,d(y,z)\}$$

$$D(u,v)=min\{1,d(u,v)\}\Rightarrow D(u,v)\leq 1$$

$$D(u,v)\leq d(u,v)$$

ومنه سنميز الحالتين :

- **الحالة الاولى:** إما $d(x,y)\geq 1$

$\Rightarrow D(x,y)=1\Rightarrow D(x,z)\leq 1=D(x,y)\leq D(x,y)+D(y,z)$

أو $d(y,z) \geq 1$

$$\Longrightarrow D(y,z) = 1 \;\Longrightarrow D(x,z) \leq 1 = D(y,z) \leq D(x,y) + D(y,z)$$

- **الحالة الثانية:** $d(x,y) < 1$ و $d(y,z) < 1$

$$\Longrightarrow D(x,y) = d(x,y) \quad \text{و} \quad D(y,z) = d(y,z)$$

$$D(x,z) \leq d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) = D(x,y) + D(y,z)$$

$$\Longrightarrow D(x,z) \leq D(x,y) + D(y,z)$$

◄ **تمرين 2 :** أثبت أن $d(x,y) = \sqrt{|x-y|}$ مسافة على $\mathbb{R}$.

الحـــل

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

1) $d(x,y) = \sqrt{|x-y|} \geq 0$

2) $d(x,y) = 0 \Longrightarrow \sqrt{|x-y|} = 0 \Longrightarrow x - y = 0 \;\Longrightarrow x = y$

3) $d(x,y) = \sqrt{|x-y|} = \sqrt{|y-x|} = d(y,x)$

4) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(x,z)$

لنثبت أن : $\sqrt{|x-z|} \leq \sqrt{|x-y|} + \sqrt{|y-z|}$

إن $|x-z| = |x-y+y-z| \leq |x-y| + |y-z|$

$$\sqrt{|x-z|} \leq \sqrt{|x-y| + |y-z|}$$

لنثبت أن : * $\sqrt{|x-y| + |y-z|} \leq \sqrt{|x-y|} + \sqrt{|y-z|}$

من العلاقة $a + b \leq a + b + 2\sqrt{a}\sqrt{b} = \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 \quad , \quad \forall a, b \in [0, \infty[$

نجذر الطرفين $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

ومنه * صحيحة $\Longleftarrow \quad \sqrt{|x-z|} \leq \sqrt{|x-y|} + \sqrt{|y-z|}$

◀ **تمرين 3 :** **(للاطلاع) :** ارسم كلا من الكرات المفتوحة $N(\ (0,0),1)$ في

$(\mathbb{R}^2\ ,d)$ ، $(\mathbb{R}^2\ ,d_1)$ ، $(\mathbb{R}^2\ ,d_\infty)$ **حيث :**

$$x=(x_1\ ,x_2),\ \ y=(y_1\ \ ,y_2)\ \in\mathbb{R}^2\ ;d(x,y)=\ \sqrt{(x_1-x_2)^2+\ (y_1-y_2)^2}$$

$$x=(x_1\ ,x_2),\ \ y=(y_1\ \ ,y_2)\ \in\mathbb{R}^2\ ;d_1(x,y)=|\ x_1-x_2\ |+\ |\ y_1-y_2\ |$$

$$x=(x_1\ ,x_2),\ \ y=(y_1\ \ ,y_2)\ \in\mathbb{R}^2\ ;d_\infty(x,y)=max\{x_1-x_2|\ ,|y_1-y_2|\}$$

الحل

من أجل $(\mathbb{R}^2\ ,d)$:

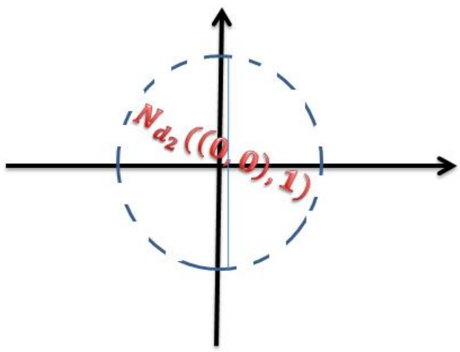
$$N\big((0,0),1\big)=\{(x_1,y_1\ )\in\mathbb{R}^2\ ;d((x_1,y_1)\ ,(0,0))<1\}$$

$$=\left\{(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2\ ;\ \sqrt{(x_1-0)^2+\ (y_1-0)^2}\ \ <1\right\}$$

$$=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ;\ \sqrt{x_1^2+y_1^2}\ \ <1\right\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ;\ \ x_1^2+\ y_1^2\ \ <1\ \}$$

وهي مجموعة الثنائيات التي تقع تماما داخل الدائرة

التي مركزها المبدأ ونصف قطرها الواحد (بلا محيط)



من أجل $(\mathbb{R}^2\ ,d_1)$:

$$N\big((0,0),1\big)=\{(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2\ ;d((x_1,y_1)\ ,(0,0))<1\}$$

$$=\{(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2\ ;|x_1-0|+\ |y_1-0|\ \ <1\ \}$$

$$=\{(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2\ ;|x_1|+\ |y_1|\ \ <1\ \}$$

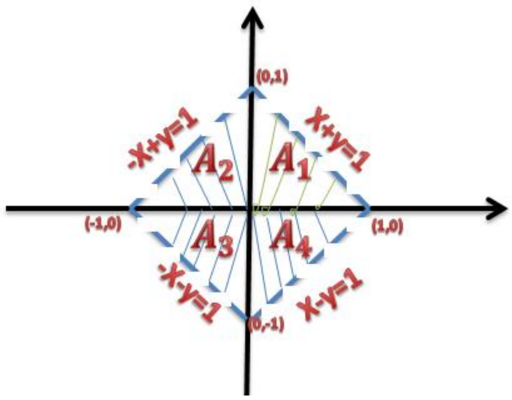
يمكن أن نقسمها إلى أربع حالات :

في الربع الأول : $x_1\ge 0\ \ ,y_1\ge 0\ \ \Leftarrow\ \ x_1+y_1<1$

في الربع الثاني : $x_1 \leq 0 \; , \; y_1 \geq 0 \;\; \Leftarrow \;\; -x_1 + y_1 < 1$

في الربع الثالث : $x_1 \leq 0 \; , \; y_1 \leq 0 \;\; \Leftarrow \;\; -x_1 - y_1 < 1$

في الربع الرابع : $x_1 \geq 0 \, , \; y_1 \leq 0 \;\; \Leftarrow \;\; x_1 - y_1 < 1$



في الربع الأول : تقع تحت المستقيم $x_1 + y_1 = 1$

في الربع الثاني : تقع تحت المستقيم $-x_1 + y_1 = 1$

في الربع الثالث : تقع فوق المستقيم $-x_1 - y_1 = 1$

في الربع الرابع : تقع فوق المستقيم $x_1 - y_1 = 1$

من أجل $(\mathbb{R}^2 \, , d_\infty)$:

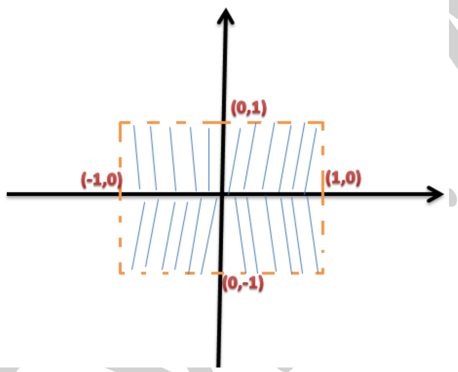
$$N\big((0{,}0),1\big) = \{(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2 \, ; d((x_1, y_1) \, , (0{,}0)) < 1\}$$

$$= \{(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2 \, ; max\{|x_1 - 0|, |y_1 - 0|\} \; < 1 \}$$

$$= \{(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2 \, ; max \;\; |x_1|, |y_1| \;\; < 1 \}$$

$$\Rightarrow -1 < x_1 < 1$$

$$-1 < y_1 < 1$$



وهي مجموعة الثنائيات التي كل من مسقطيها

يقع بين العددين -1 و 1 ، وتقع الكرة داخل المربع .

◄تمرين 4 : في $(\mathbb{R} \, , |.|)$ أثبت أن المتتالية $\{(-1)^n\}$ غير متقاربة و اعطي مثال عن متتالية جزئية منها .

الحــل

لنفرض جدلا أن المتتالية $\{x_n = (-1)^n\}$ متقاربة من $a \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \forall \; \varepsilon > 0; \exists n_0 \in \; \mathbb{N}^* \, ; n \geq n_0 \;\; \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow (-1)^n - a < \varepsilon$$

نميز الحالات :

1) $\Leftarrow \varepsilon = 1 \ , \ a \geq 1$ $\quad \exists n_0 \in \mathbb{N}^* \ ; n \geq n_0 \ \Longrightarrow |(-1)^n - a| < 1$

وبفرض $n_0 \leq n$ عدد فردي

مرفوض $\Longrightarrow |-1 - \mathrm{a}| < 1 \ \Longrightarrow 1 + a < 1 \ \Longrightarrow a < 0$

2) $\Leftarrow \varepsilon = 1 \ , \ a \leq -1$ $\quad \exists n_0 \in \mathbb{N}^* \ ; n \geq n_0 \ \Longrightarrow |(-1)^n - a| < 1$

وبفرض $n_0 \leq n$ زوجي

مرفوض $\Longrightarrow |1 - \mathrm{a}| < 1 \ \Longrightarrow 1 - a < 1 \ \Longrightarrow -a < 0$

3) $-1 < a < 1$ و $0 < \varepsilon = 1 + a$

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^* \ ; n \geq n_0 \ \Longrightarrow |(-1)^n - a| < 1 + a$$

وبفرض $n \geq n_0$ فردي

مستحيل $|-1 - a| < 1 + a \ \Longrightarrow 1 + a \ < 1 + a$

إذا المتتالية ليس لها نهاية فهي ليست متقاربة و الفرض الجدلي خاطئ .

***المتتالية الجزئية :**

$$n_1 = 2 \quad , \quad n_2 = 4 \quad , \quad n_3 = 6 \quad \dots \dots \ n_k = 2k$$

$$n_1 < n_2 < n_3 \ \dots\dots\dots < n_k < \dots$$

$$x_{n_k} = (-1)^{nk} = (-1)^{2k} = 1$$

إن المتتالية الجزئية $\{x_{n_k} = 1\}$ مهما تكن k

أي $\underset{n \to \infty}{x_n \to 1}$

انتهت المحاضرة

إعداد: ناريمان جلو – آية اليافي – هالة مصطفى