نظري

◄ دكتورة المادة: ريم الحاج خليفة

◄ المحاضرة: الثالثة ◄ عنوان المحاضرة: تعاريف

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١. العناصر القابلة للقلب وأمثلة عليها ومبرهنة لبعض خواصها.

٢ـ قواسم الصفر + أمثلة .

العناصر القابلة للقلب : ((تعريف)): لتكن $\mathcal{R}$ حلقة واحدية وليكن $a \in \mathcal{R}$ مغاير للصفر.

(لا يساوي الصفر) :

١ـ **نقول عن العنصر a** أنه قابل للقلب من اليسار في $\mathcal{R}$ إذا وجد عنصر وليكن $b \in \mathcal{R}$ بحيث يحقق العلاقة $b.a = 1$ (أي يوجد له مقلوب من اليسار).

٢ـ **نقول عن العنصر a** أنه قابل للقلب من اليمين في $\mathcal{R}$ إذا وجد عنصر وليكن $d \in \mathcal{R}$ بحيث يحقق العلاقة $a.d = 1$ (أي يوجد له مقلوب من اليمين).

٣ـ **نقول عن العنصر a** قابل للقلب (قلوب) في $\mathcal{R}$ إذا وجد عنصر وليكن $c \in \mathcal{R}$ بحيث

$$c.a = a.c = 1$$

مقلوب a نرمز له بالرمز a^{-1}

أمثلة :

١ـ **ليكن لدينا المصفوفة** $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ **هل المصفوفة قابلة للقلب ؟**

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فهي قلوبة.

طريقة إيجاد المقلوب للمصفوفة من المرتبة 2 تكون ب الحفاظ على عناصر القطر الثانوي ونبدل عناصر القطر الرئيس ونبدل الإشارة .

٢ـ نأخذ الحلقة Z ذات المقاس 5

هل هذه الحلقة قابلة للقلب ؟ $Z_5 = \{0,1,2,3,4\}$

جميع العناصر المغايرة للصفر قابلة للقلب (وضعنا ضرب لأنها قابلة للقلب)

$\odot$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

إذاً عناصر Z_5 قابلة للقلب ..

مبرهنة : لتكن $\mathcal{R}$ حلقة واحدية وليكن $a \in \mathcal{R}$ عنصر مغاير للصفر .

١- الشرط اللازم والكافي ليكون a عنصراً قابلاً للقلب في $\mathcal{R}$ هو ان يكون قابل للقلب من اليمين ومن اليسار في آن واحد .

٢- إذا كان العنصر a قابلاً للقلب في $\mathcal{R}$ فهو وحيد او مقلوبه وحيد .

البرهان

١) **لزوم الشرط:** لنفرض أن a عنصراً قابلا للقلب في $\mathcal{R}$ فيوجد له مقلوب وليكن $c \in \mathcal{R}$ ويكون مغايراً للصفر ويحقق الشرط التالي $c.a = a.c = 1$

هذا يدل على أن الشرط محقق أي أن العنصر a قابل للقلب من اليمين واليسار .

كفاية الشرط: لنفرض أن a عنصراً قابلاً للقلب من اليمين واليسار في $\mathcal{R}$ عندئذٍ يوجد عناصر b, d مغايرة للصفر تحقق الشروط التالية $b.a = 1$ وَ $a.d = 1$ سوف نبرهن أن $b = d$

يمكن أن نكتب أن $b = b.1 = b(a.d) = (b.a)d = 1.d = d \Leftarrow$ إن العنصر a قابل للقلب.

٢) بفرض أن a عنصراً قابلاً للقلب في $\mathcal{R}$ ولنفرض أن العنصرين v, u مقلوب للعنصر a في $\mathcal{R}$ في هذه الحالة يتحقق أن $u.a = a.u = 1 \ , \ v.a = a.v = 1$

يجب أن نبرهن أن $v = u$

$$u = 1.u = (v.a)u = v(a.u) = v.1 = v$$

أي أن مقلوب العنصر a هو وحيد .

تعريف : إذا كانت $\mathcal{R}$ حلقة واحدية فإن واحد الحلقة هو عنصر قابل للقلب .
نرمز لمجموعة العناصر القابلة للقلب في $\mathcal{R}$ بالرمز $U(\mathcal{R})$.

مبرهنة : لتكن $\mathcal{R}$ حلقة واحدية إن مجموعة العناصر القابلة للقلب في $\mathcal{R}$ تشكل زمرة بالنسبة لعملية الضرب في $\mathcal{R}$.

البرهان

(يجب التحقق من شروط الزمرة ال ٤ وذلك بفرض مجموعة والتحقق بأنها غير خالية اولاً)

بفرض أن $U(\mathcal{R})$ مجموعة العناصر القابلة للقلب في $\mathcal{R}$ وبما أن الحلقة واحدية وانه الواحد هو عنصر قابل للقلب فإن $1 \in U(\mathcal{R})$ هذا يعني أن $U(\mathcal{R}) \neq \emptyset$.

- ليكن $a, b \in U(\mathcal{R})$ اذاً لهما مقلوب حيث $a^{-1}, b^{-1} \in \mathcal{R}$ اذاً
$a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1 \quad , b.b^{-1} = b^{-1}.b = 1$

والآن لنبرهن أن $a.b \in U(\mathcal{R})$ **(اذا استطعنا أن نوجد مقلوب العنصر $a.b$ فيكون $a.b \in U(\mathcal{R})$).**

$$(a.b).(b^{-1}.a^{-1}) = a\underbrace{(b.b^{-1})}_{1}a^{-1} = a.a^{-1} = 1$$

$$(b^{-1}.a^{-1}).(a.b) = b^{-1}\underbrace{(a.a^{-1})}_{1}b = b^{-1}.b = 1$$

ومنه $a.b \in U(\mathcal{R})$.

أي أن العنصر $a.b$ له مقلوب هو $b^{-1}.a^{-1}$ وبالتالي فعملية الضرب هي عملية داخلية .

- وإن $U(\mathcal{R})$ عملية تجميعية لأن $U(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$
- كما أنه يوجد لكل عنصر من المجموعة $U(\mathcal{R})$ عنصر محايد هو واحد الحلقة نفسه .
- لنبرهن أن لكل عنصر من المجموعة $U(\mathcal{R})$ يوجد مقلوب .

ليكن $c \in U(\mathcal{R})$ عندئذٍ العنصر c له مقلوب هو $c^{-1} \in \mathcal{R} \implies c.c^{-1} = c^{-1}.c = 1$

أي أنه يوجد للعنصر c مقلوب هو $c^{-1} \in U(\mathcal{R})$ اذاً المجموعة $U(\mathcal{R})$ تشكل زمرة بالنسبة لعملية الضرب وهو المطلوب .

قواسم الصفر : نعلم أن في النظام العددي أي عددين جداؤهما يساوي الصفر يجب أن يكون أحد العددين يساوي الصفر وهذا الكلام غير محقق دوماً في مجال الحلقات .

أمثلة :

١. حلقة المصفوفات ولتكن $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ ولتكن الاعداد a, b, c, d مغايرة للصفر(أي لا تساوي الصفر) $\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ وبذلك وجدنا أنه في حال ضرب مصفوفتين غير صفريتين يمكن أن تساوي مصفوفة صفرية .

٢. لنأخذ الحلقة $\mathbb{Z}_8 = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ ولنأخذ مثلا :
$\begin{cases} 2.4 = 0 \\ 4.4 = 0 \end{cases}$ أحد المضروبين لا يساوي الصفر ونجد أن الناتج يساوي الصفر .

تعريف : ليكن $\mathcal{R}$ حلقة وَ $a \in \mathcal{R}$ مغاير للصفر عندئذٍ :

- نقول عن العنصر a أنه قاسم للصفر من اليسار في $\mathcal{R}$ اذا وجد عنصر وليكن $b \in \mathcal{R}$ وهو مغاير للصفر وتحققت العلاقة $a.b = 0$
- نقول عن العنصر a أنه قاسم للصفر من اليمين في $\mathcal{R}$ اذا وجد عنصر وليكن $b \in \mathcal{R}$ وهو مغاير للصفر بحيث يكون $b.a = 0$
- نقول عن العنصر a أنه قاسم للصفر في الحلقة $\mathcal{R}$ اذا كان قاسماً من اليمين واليسار في آن واحد .

أمثلة :

١- حلقة الاعداد الصحيحة لا تحوي قواسم للصفر . (لأنه لا يوجد عددين نضربهما ببعض يعطي الناتج الصفر إلا اذا كان أحد العددين صفر وهذا يناقض التعريف).

٢- حلقة المصفوفات $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ تحوي قواسم للصفر .

٣- المجموعة $\mathbb{Z}_5 = \{0,1,2,3,4\}$ **هل تحوي قواسم للصفر ؟**

$\odot$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

$\Leftarrow$ **الحلقة $\mathbb{Z}_5$ لا تحوي قواسم للصفر..**

انتهت المحاضرة إعداد:هلا هجع – لانا شهاب – احمد ابو التوت