نظري

◄ دكتور المادة: علي قبوي

◄ المحاضرة: الأولى والثانية

عنوان المحاضرة: تذكرة +بعض التوزيعات الاحتمالية الشهيرة

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

سنبدأ معكم أصدقائي بمقرر الإحصاء الرياضي وهو تتابع لما بدأنا به في نظرية الاحتمالات بالفصل الأول

سندرس من خلال هذا المقرر الفصول التالية :

١- التوزيعات الاحتمالية الشهيرة :
أ- لمتغير عشوائي منقطع (منفصل)
ب-لمتغير عشوائي مستمر (متصل)
٢- الإحصاء .
٣- مجالات الثقة .
٤- اختبار فرضيات (ليس من المؤكد أن نأخذ هذا الفصل)

تنويه : سنحتاج خلال هذا المقرر لجداول التوزيع الطبيعي ، سيتودنت ، كاي ، مربع (تربيع)

" وهي مهمة للامتحان "

تذكرة :

تعريف المتغير العشوائي:

هو دالة $X:\Omega \longrightarrow R$ بحيث نلحق بكل حدث ابتدائي $w \in \Omega$ قيمة حقيقة $X(w)$ من R
أو الصورة العكسية لأي مجموعة حقيقية من X هو مجموعة جزئية من Ω (حدث)

هناك نوعين للمتغير العشوائي :

١- متغير عشوائي منقطع (منفصل) R_X " أي مجموعة قيمه مجموعة منتهية أو غير منتهية لكنها قابلة للعد $\{0,1,2,\dots\}$ "

٢- متغير عشوائي مستمر (متصل) " أي مجموعة قيمه مجموعة غير منتهية وغير قابلة للعد $[50,150]$"

يوجد لكل متغير عشوائي :

١- دالة احتمال $P(X = x_i)$ إذا كان منقطع ، أو **دالة كثافة احتمالية** إذا كان مستمر
$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

٢- دالة توزيع احتمالية تميزه (إذا كان مستمر أو منقطع)

$$F_X(x) = P(X \le x) = \begin{cases} \sum_{x_i \in R_X} f_X(x_i) & ;X \text{ منقطع} \\ \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx & ;X \text{ مستمر} \end{cases}$$

٣- توقع وتباين وانحراف معياري خاص به :

$$E(X) := \begin{cases} \sum_{x_i \in R_X} x_i\, f_X(x_i) & ;X \text{ منقطع} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx & ;X \text{ مستمر} \end{cases}$$

$$V(X) := E(X - EX)^2 = EX^2 - (EX)^2$$
$$\sigma_X := \sqrt{V(X)}$$

حيث : $E(X)$ التوقع الرياضي
و $V(X)$ التباين
و σ_X الانحراف المعياري

٤- دالة مولدة للعزوم :

$$M_X(t) := E(e^{tX}) = \begin{cases} \sum_{x_i \in R_X} e^{tx_i} f_X(x_i) & ;X \text{ منقطع} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)\,dx & ;X \text{ مستمر} \end{cases}$$

٥- دالة مميزة متعلقة به .

والآن لنبدأ بمقررنا لهذا الفصل ...

بعض التوزيعات الاحتمالية المنقطعة

١- توزيع برنولي :

نسمي كل تجربة لها نتيجتان فقط تجربة برنولية ، نسمي احدى النتيجتين نجاحا والأخرى فشلا .
(من الممكن أن نضع الفشل نجاح والنجاح فشل ويكون ذلك بحسب التجربة)
نرمز لاحتمال النجاح (P) واحتمال الفشل $(q = 1 - P)$ "الحدث المتمم للنجاح"
حيث نسمي (P) **وسيط التجربة البرنولية** .

مثال (١) :

تجربة إلقاء قطعة نقود متزنة هي تجربة برنولية لها نتيجتان إما الصورة (نجاح) أو الكتابة (فشل) ووسيط هذه التجربة هو $\left(P = \frac{1}{2}\right)$

مثال (٢) :

إذا القينا حجري نرد وسمينا نتيجة التجربة نجاحا إذا كان مجموع الوجهين (4) وفشلا خلاف ذلك فنكون أمام تجربة برنولية وسيطها $\left(P = \frac{3}{36}\right)$ ويكون الحدث المتمم $\left(q = \frac{33}{36}\right)$.

تعريف :

نقول عن متغير عشوائي منقطع (X) أن له توزيعا برنوليا بوسيط (P) ونرمز لذلك ب $\big(X \sim Ber(P)\big)$
حيث : (P) وسيط برنولي
و $(\sim)$ تقرأ يتبع .
إذا كانت له دالة الكثافة الاحتمالية التالية :

$$\boxed{f_X(x) = P^x . q^{1-x} \qquad ; x = 0,1}$$

أي أن له جدول التوزيع الاحتمالي التالي :

X	$x_1 = 0$	$x_2 = 1$	مج
$f_X(x) = P(X = x_i)$	q	P	1

تنويه : يجب كتابة قيم الوسيط (x) يوجد درجات عليه في الامتحان .

مميزات هذا التوزيع :

١- **التوقع والتباين** :

$$E(X) \coloneqq \sum_{x} x.f_X(x)$$

$$\Longrightarrow E(X) = \sum_{x=0}^{x=1} x.P^x.q^{1-x}$$

$$\Longrightarrow E(X) = (0).P^0.q^1 + (1).P^1.q^0$$

$$\boxed{\Longrightarrow E(X) = 0 + P = P}$$

$$E(x^2) = \sum_{x=0}^{x=1} x^2.f_X(x)$$

$$\Longrightarrow E(X^2) = 1.P^1.q^0 = P$$

$$V(X) \coloneqq E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

$$\Longrightarrow V(X) = P - P^2$$

$$\boxed{\Longrightarrow V(X) = P(1-P) = P.q \quad ; 1 - P = q}$$

$$\boxed{\Longrightarrow \sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{P.q}}$$

حيث : $E(X)$ التوقع الرياضي

و $V(X)$ التباين

و σ_X الانحراف المعياري

٢- **الدالة المولدة للعزوم :**

تعطى بالعلاقة التالية ..

$$M_X(t) \coloneqq E(e^{tx}) = \sum_{x} e^{xt}.f_X(x)$$

$$\Longrightarrow M_X(t) = \sum_{x=0}^{1} e^{tx}.P^x.q^{1-x}$$

$$\Longrightarrow M_X(t) = e^0.P^0.q^1 + e^t.P^1.q^0$$

$$\boxed{\Longrightarrow M_X(t) = q + P.e^t \quad ; t \in R}$$

أصبح بإمكاننا الآن إيجاد طريقة أخرى لحساب التوقع والتباين باستخدام الدالة المولدة للعزوم $M_X(t)$: وجدنا أن :

$$M_X(t) = q + Pe^t$$

$$\Longrightarrow \left(M_X(t)\right)'_t = Pe^t$$

$$\Longrightarrow E(X) = \left(M_X(t)\right)'_t\Big|_{t=0} = Pe^t\big|_{t=0} = P$$

$$M''_X(t) = Pe^t$$

$$\Rightarrow E(X^2) = M''_X(t)|_{t=0} = Pe^t|_{t=0} = P$$
$$\Rightarrow V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$$
$$\Rightarrow V(X) = P - P^2 = P(1-P) = P.q$$

مثال :

بالعودة إلى المثال السابق لرمي حجري النرد وظهور رقمين مجموعهما (4) نجد أن (X) المتغير الدال على ظهور المجموع (4) يتبع التوزيع البرنولي وله جدول التوزيع

X	$x_1 = 0$	$x_2 = 1$	مج
$f_X(x) = P(X = x)$	$\frac{33}{36}$	$\frac{3}{36}$	1

وبالتالي ل (X) دالة الكثافة :

$$f_X(x) = P^x . q^{1-x} \qquad ; x = 0,1$$
$$\Rightarrow f_X(x) = \left(\frac{3}{36}\right)^x . \left(\frac{33}{36}\right)^{1-x} \qquad ; x = 0,1$$

ومنه يكون التوقع الرياضي : $E(X) = P = \frac{3}{36}$

والتباين : $V(X) = P.q = \frac{(3)(33)}{(36)^2} = \frac{99}{(36)^2}$

وبالتالي يكون : $M_X(t) = \frac{33}{36} + \frac{3}{36}.e^t$

٢- التوزيع الحداني (الثنائي) :

إذا كررنا تجربة برنولية وسيطها (P) احتمال النجاح عدد (n) مرة حيث $(n \geq 2)$ وكانت هذه التكرارات مستقلة عن بعضها عندئذ :

فإن ل (X) الذي يمثل عدد مرات النجاح التوزيع الحداني (الثنائي) "$Binomiel$"

تعريف :

نقول عن المتغير العشوائي المنقطع (X) ، أن له توزيعا حدانيا بوسيطين (n) و (P) ونرمز لذلك ب

$$X \sim bin\,(n, P)$$

حيث : (P) احتمال النجاح

و(n) عدد مرات تكرار التجربة البرنولية

تنويه " يجب الحفاظ على الترتيب في كتابة (n, P) "

إذا كانت له دالة الكثافة الاحتمالية التالية :

$$f_X(x) = \binom{n}{x}.P^x.q^{n-x} \quad ; 0,1,2, \dots\dots, n$$

أي أن ل (X) جدول التوزيع الاحتمالي :

X	0	1	....	k	....	n	مج
$f_X(x)$	q^n	$\binom{n}{1}.P.q^{n-1}$	......	$\binom{n}{k}.P^k.q^{n-k}$	......	P^n	1

ملاحظة :

$$\sum_x f_X(x) = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x}.P^x.q^{n-x} = (P+q)^n = 1^n = 1$$

وذلك حسب منشور ثنائي حد نيوتن :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.x^k.y^{n-k}$$

مميزات التوزيع الحداني :

١- الدالة المولدة للعزوم :

وتعطى بالعلاقة

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \sum_k e^{tx}.f_X(x)$$

$$\Rightarrow M_X(t) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx}.\binom{n}{x}.P^x.q^{n-x}$$

$$\Rightarrow M_X(t) = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x}.(Pe^t)^x.q^{n-x} = (q+Pe^t)^n$$

وذلك حسب منشور ثنائي حد نيوتن . و (n) هي عدد مرات التكرار .

٢- التوقع الرياضي والتباين :

يعطى التوقع الرياضي بالعلاقة التالية ،وهي المشتق الأول للدالة المولدة للعزوم

$$M'_X(t) = n(q+Pe^t)^{n-1}.Pe^t$$

$$\Longrightarrow E(X) = M'_X(t)|_{t=0} = n.P$$

وبالحساب نجد التباين يعطى بالعلاقة التالية :

$$V(X) = n.P.q$$

ومنه يكون الانحراف المعياري هو :

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{n.P.q}$$

مبرهنة :

إذا كانت $X_1, X_2, \dots\dots, X_n$ متغيرات عشوائية مستقلة والتي لكل منها التوزيع البرنولي بوسيط (P) فإن المتغير العشوائي : $Y := \sum_{i=1}^{n} X_i$ له التوزيع الحداني بوسيطين (n) و (P) .

البرهان :

"باستخدام الدالة المولدة للعزوم"

بما أن ل $X_1, X_2, \dots\dots, X_n$ التوزيع البرنولي بوسيط (P) فإن الدوال المولدة للعزوم لها الشكل

$$M_{X_i}(t) = q + Pe^t$$

وحسب مبرهنة (في مقرر نظرية الاحتمالات) بما أن المتغيرات $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ مستقلة عن بعضها البعض فإن :

$$M_Y(t) = M_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t)$$

$$\Longrightarrow M_Y(t) = \prod_{i=1}^{n}(q + Pe^t) = (q + Pe^t)^n \quad \text{"جداء الحد بنفسه n مرة "}$$

وهي دالة مولدة لعزوم متغير عشوائي حداني بوسيطين (n) و (P) .

ملاحظة :

كل متغير عشوائي حداني وسيطاه (n) و (P) هو مجموع ل (n) متغير عشوائي برنولي وسيطها (P) ومستقلة عن بعضها .

تذكرة :

تكون المتغيرات $X_1, X_2, \dots\dots, X_n$ مستقلة عن بعضها البعض إذا **حققت الشرط**

$$f_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots\dots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)$$

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x_i).f_Y(y)$$

تمرين :

إذا كان احتمال أن يصيب رام الهدف هو (0.8) فإذا صوب الرامي نحو الهدف (5) مرات ورمزنا ب (X) لعدد مرات إصابة الهدف ، **والمطلوب :**

١- اكتب دالة احتمال المتغير العشوائي .

٢- احسب احتمال إصابة الهدف مرة واحدة فقط .

٣- احسب احتمال إصابة الهدف مرة واحدة على الأكثر.

٤- احسب احتمال إصابة الهدف مرتين على الأقل .

٥- احسب احتمال إصابة الهدف .

٦- احسب القيمة المتوقعة لإصابة الهدف و الانحراف المعياري .

الحل:

١- إن التسديد نحو الهدف هو تجربة برنولية (إصابة ،عدم إصابة) وسيطها (احتمال النجاح الإصابة $P = 0.8$) وهي مكررة $(n = 5)$ بشكل مستقل .

وبالتالي يكون ل (X) التوزيع الداني (الثنائي) بوسيطين $(n = 5 , P = 0.8)$

فتكون دالة الكثافة (الاحتمال) لها الشكل :

$$f_X(x) = \binom{n}{x}.P^x.q^{n-x} \quad ; 0,1,2,\dots\dots,n$$

$$\Rightarrow f_X(x) = \binom{5}{x}.(0.8)^x.(0.2)^{5-x} \quad ; 0,1,2,3,4,5$$

حيث : $(q = 1 - P = 1 - 0.8 = 0.2)$ الحدث المتمم .

٢- بالتعويض بالقانون بالطلب الأول نجد :

$$f_X(1) = P(X = 1) = \binom{5}{1}.(0.8)^1.(0.2)^4 = 0.0064$$

٣- اما أصاب مرة أو عدم الإصابة

$$f_X(0) + f_X(1) = P(X \le 1)$$

$$P(X \le 1) = \binom{5}{0}.(0.8)^0.(0.2)^5 + \binom{5}{1}.(0.8)^1.(0.2)^4$$

$$\Rightarrow P(X \le 1) = 0.00032 + 0.0064 = 0.00672$$

٤- نريد حساب $P(X \geq 2)$ وهو احتمال الإصابة مرتين على الأقل

للسهولة نحسب الحدث $1 - P(X < 2)$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2)$$
$$\Longrightarrow P(X \geq 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$$
$$\Longrightarrow P(X \geq 2) = 1 - 0.00672 = 0.99328$$

٥- احتمال إصابة الهدف

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1)$$
$$\Longrightarrow P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$$
$$\Longrightarrow P(X \geq 1) = 1 - 0.00032 = 0.99968$$

ويسمى مثل هذا الاحتمال بالاحتمال شبه الأكيد (لأنه يقترب كثيرا من الواحد)

٦- القيمة المتوقعة هي :

$$E(X) = n.P = (5)(0.8) = 4$$

ولدينا التباين يعطى بالعلاقة :

$$V(X) = n.P.q = (5)(0.8)(0.2) = 0.8$$

ومنه يكون الانحراف المعياري :

$$\sigma_{\mathrm{X}} = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.8} \approx 0.9$$

انتهت المحاضرة

إعداد: مهيار طعمة ^ نهى حبشية ^ نور مهرة

ثم يرضيك الله كأنك لم تحزن يوما