نظري

◄ دكتور المادة : أحمد هايل

◄ المحاضرة : الثانية ◄ عنوان المحاضرة : المتتاليات في الفضاء المتري

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ أمثلة وملاحظات وتعاريف.

٢ـ المتتاليات في الفضاء المتري وتقاربها من نهايتها الوحيدة .

أمثلة :

١ـ ليكن $x = B[a,b]$ مجموعة كل التوابع الحقيقية المحدودة من المجال $[a,b]$ في $\mathbb{R}$ ولنعرف التابع:

$$d: X \times X \to \mathbb{R} \quad , \quad x : [a,b] \to \mathbb{R} \quad , \quad y : [a,b] \to \mathbb{R}$$

$$d(x,y) = sup|x(t) - y(t)| \quad ; t \in [a,b]$$

أثبت أن d مسافة و أن $(B[a,b],d)$ فضاء متري . ؟؟

ملاحظة : $Bounded\ X = B\ [a,b]$ محدد و $Continuous\ \ X = C[a,b]$ مستمر

الحل

إن المقدار $d(x,y)$ موجود لان :

*التابع x محدود : $|x(t)| \leq A$

* التابع y محدود : $|y(t)| \leq B; t \in [a,b]$

$$|x(t) - y(t)| \leq |x(t)| + |y(t)| \leq A + B \quad \forall t \in [a,b]$$

d مسافة لان :

$$\forall x,y \in X\ ; d(x,y) = sup|x(t) - y(t)| \geq 0 \quad (1$$

$$\forall x,y \in X\ ; d(x,y) = 0 \implies sup|x(t) - y(t)| = 0 (2$$

$$\implies x(t) - y(t) = 0 \quad \implies x(t) = y(t) \implies x = y$$

$\forall x,y \in X\,; d(x,y) = sup|x(t)-y(t)| \;= sup\,|-\big(y(t)-x(t)\big)|$ (3

$= sup|y(t)-x(t)| = d(y,x)$

$|x(t)-z(t)| \le |x(t)-y(t)| + |y(t)-z(t)| \quad ; z:[a,b] \to \mathbb{R}$(4

$\le d(x,y) + d(y,z) \;\Rightarrow sup|x(t)-z(t)| \le d(x,y) + d(y,z)$

$\Longrightarrow d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$

المثال ٢ : ليكن $X = c[a,b]$ مجموعة كل التوابع الحقيقية المستمرة على المجال $[a,b]$ في $\mathbb{R}$ ولنعرف التابع

$d: X\times X \to \mathbb{R} \qquad , \quad X:[a,b]\to\mathbb{R} \quad , \quad y:[a,b]\to\mathbb{R}$

$d(x,y) = sup|x(t)-y(t)| : t\in[a,b]$

أثبت أن d مسافة وأن $(c[a,b],d)$ فضاء متري .؟؟

الحــل

إن المقدار $d(x,y)$ موجود لأن :

* التابع x مستمر $|x(t)| \le A$

* التابع y مستمر $|y(t)| \le B; t\in[a,b]$

$|x(t)-y(t)| \le |x(t)| + |y(t)| \le A+B \quad ; t\in[a,b]$

إن d مسافة لأن :

$\forall x,y \in X\,; d(x,y) = sup|x(t)-y(t)| \;\ge 0$ (1

$\forall x,y \in X\,; d(x,y) = 0$ (2

$\Rightarrow sup|x(t)-y(t)| = 0 \qquad \Rightarrow x(t)-y(t) = 0$

$\Rightarrow x(t) = y(t) \Rightarrow x = y$

$\forall x,y \in X\,; d(x,y) = sup|x(t)-y(t)|$ (3

$= sup\big|-\big(y(t)-x(t)\big)\big| \;= sup|\,y(t)-x(t)| \;= d(y,x)$

$\forall z:[a,b]\to\mathbb{R}$ (4

$$|x(t) - z(t)| \le |x(t) - y(t)| + |y(t) - z(t)|$$
$$\le d(x,y) + d(y,z)$$
$$\Rightarrow sup|x(t) - z(t)| \le d(x,y) + d(y,z)$$
$$\Rightarrow d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$$

◄ **تنويه :** كل تابع مستمر على مجال محدود مغلق يكون محدود .

◄ **ملاحظات :**

١- يمكن تعريف أكثر من مسافة على نفس المجموعة .
٢- عندما نقول الفضاء الحقيقي المألوف :
- $\mathbb{R}$ يعني : $\mathbb{R}$ مع المسافة $|x - y|$
- $\mathbb{R}^2$ يعني : $\mathbb{R}^2$ مع المسافة $\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$
- $\mathbb{R}^n$ يعني : $\mathbb{R}^n$ مع المسافة $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$

٣- إذا كان لدينا في فضاء متري (x,d) : $x_n, x_2 \,, \ldots\ldots, x_1$

$$\Rightarrow d(x_1 \,, x_n) \le d(x_1 \,, x_2) + d(x_2 \,, x_n)$$
$$d\,(x_1 \,, x_n) \le d(x_1 \,, x_2) + d(x_2 \,, x_3) + d(x_3 \,, x_n)$$
$$d(x_1 \,, x_n) \le d(x_1 \,, x_2) + \cdots + d(x_{n-1} \,, x_n)$$

المتتاليات في الفضاء المتري

المتتالية : هي تابع من $\mathbb{N}^*$ في الفضاء X

$$x: \mathbb{N}^* \to X$$
$$\underbrace{x(1)}_{x_1}, \underbrace{x(2)}_{x_2}, \underbrace{x(3)}_{x_3}, \ldots\ldots, \underbrace{x(n)}_{x_n}..$$

ويرمز لها بالرمز $\{x_n\}$.

تعريف تقارب المتتالية : نقول عن المتتالية $\{x_n\}$ في الفضاء المتري X متقاربة من x إذا كان :

$$d(x_n \,, x) \underset{n\to\infty}{\to} 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0; \exists n_0 \in \mathbb{N}^* : n \ge n_0 \Rightarrow d(x_n \,, x) < \varepsilon$$

يرمز لتقارب $\{x_n\}$ من x :

١) $x \lim_{n\to\infty} x_n =$
٢) $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x$
٣) باختصار $x_n \to x$.

➢ **مبرهنة :** في الفضاء المتري توجد للمتتالية نهاية واحدة على الأكثر .

البرهان :

ليكن (x,d) فضاء مري ولتكن $\{x_n\}$ متتالية من عناصره ولنفرض أن لها نهايتان ، أي :

$$x_n \to a \Leftarrow d(x_n\,,a) \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

$$x_n \to b \Leftarrow d(x_n\,,b) \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

$$o \le d(a\,,b\,) \le d(a\,,x_n) + d(x_n\,,b)$$

$$= d(x_n\,,a\,) + d(\,x_n,b)$$

<< لأنها متناظرة حسب متراجحة المثلث >>

$$\Rightarrow 0 \le d(a\,,b) \le 0 \quad \Rightarrow d(a\,,b) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = b$$

أمثلة : مثال (١) :

❖ لتكن $x = \mathbb{R}$ و $\{x_n\}$ متتالية والتابع

$$d(x\,,y) = |x-y|$$
$$x_n \to x$$
$$\Rightarrow d(x_n\,,x) \underset{n\to\infty}{\to} o \qquad \Rightarrow |x_n - x| \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\,; \exists n_0 \in \mathbb{N}^* \;: n \ge n_0; |x_n - x| < \varepsilon$$

❖ **مثال (٢) :** لتكن $x = \mathbb{R}^2$ والمتتالية $\{(x_n\,,y_n)\}$ برهن أن :

$$x_n \to_{n\to\infty} x \Leftrightarrow (x_n\,,y_n) \to_{n\to\infty} (x,y\,) \text{ و } y_n \to_{n\to\infty} y$$

أي : $\{(x_n\,,y_n)\}$ متتالية في $\mathbb{R}^2$ متقاربة من $x,y \in \mathbb{R}$

هذا يكافئ أن : $x_n \to_{n\to\infty} x$ في $\mathbb{R}$ و $y_n \to_{n\to\infty} y$ في $\mathbb{R}$.

(وظيفة للمحاضرة القادمة).

تعريف المتتالية الجزئية : ليكن $(x\,,d)$ فضاء متري و $\{x_n\}$ متتالية من عناصره ولدينا المتتالية $\{n_k\}$ من عناصر $\mathbb{N}^*$ بحيث :

$$n_1 \lneqq n_2 \lneqq n_3 \lneqq \cdots$$

$\{n_k\}$ متزايدة تماما فندعو المتتالية $\{x_{n_k}\}$ متتالية جزئية من $\{x_n\}$ ونلاحظ أن $k \le n_k$.

مثال: ليكن $x = \mathbb{R}$ و $\left\{x_n = \frac{1}{n}\right\}$ من المتتاليات الجزئية من :

$\left\{\frac{1}{n^3}\right\}$ ، $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ ، $\left\{\frac{1}{2n}\right\}$ ولنأخذ المتتالية $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$

$$n_1 = 1 \quad < n_2 = 4 \quad < n_3 = 9 < \cdots$$

$$x_{n_1} = \frac{1}{n_1} = \frac{1}{1} \quad , \quad x_{n_2} = \frac{1}{n_2} = \frac{1}{4} \quad , \quad x_{n_3} = \frac{1}{n_3} = \frac{1}{9}$$

➢ **مبرهنة :** إذا كان $(x\,,d\,)$ فضاء متري وفيه المتتالية $\{x_n\}$ متقاربة من x وكانت $\{x_{n_k}\}$ متتالية جزئية منها ، فإن $\{x_{n_k}\}$ متقاربة من x، أي :

$$x_n \to_{n\to\infty} x \Leftrightarrow x_{n_k} \to_{k\to\infty} x.$$

البرهان :

بما أن $x_n \to x$ فإن :

$$\forall \varepsilon > 0; \exists n_0 \in \mathbb{N}^*\,; n \ge n_0 \;\Rightarrow\; d(x_n\,,x) < \varepsilon$$

من أجل $\varepsilon > 0$ وجدنا n_0 بحيث $n > n_0 \Rightarrow d(x_n\,,x) < \varepsilon$

فإذا كان $n_0 \le k$

$$\Rightarrow n_0 \le k \le n_k \quad \Rightarrow n_0 \le n_k \quad \Rightarrow d(x_{n_k}\,,x) < \varepsilon$$

فإن :

$$\forall \varepsilon > 0; \exists\, n_0 \in \mathbb{N}^*; k \ge n_0 \Rightarrow d(x_{n_k}\,,x) < \varepsilon$$

$$x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\to} x$$

تعريف الكرة المفتوحة : ليكن (x,d) فضاء متري و $a \in x$ و $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ عندئذ ندعو المجموعة :

$$N(a,\varepsilon) = \{x \in X : d(x\,,a) < \varepsilon\}$$

بالكرة المفتوحة التي مركزها a ونصف قطرها ε .

تعريف المجموعة المفتوحة : نقول أن المجموعة $x \supseteq U$ أنها مفتوحة في الفضاء المتري x إذا :

وجد لكل عنصر $a \in x$ عدد $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ بحيث : $N(a, \varepsilon) \subseteq U$.

تعريف المجموعة المغلقة : نقول أن المجموعة $F \subseteq x$ أنها مغلقة في الفضاء المتري x إذا كانت المجموعة $x \setminus F$ مفتوحة في الفضاء المتري (x, d) .

تعريف الكرة المغلقة : ليكن (x, d) فضاء متري و $a \in x$ و $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ ، عندئذ ندعو المجموعة:

$$B(a, \varepsilon) = \{x \in X \,;\, d(x, a) \le \varepsilon\}$$

بالكرة المغلقة التي مركزها a ونصف قطرها ε .

تعريف المجموعة المحدودة : نقول أن المجموعة $A \subseteq x$ محدودة في الفضاء المتري (x, d) إذا أمكن ايجاد كرة مفتوحة تحويها أي إذا وجد $a \in x$ و $r > 0$ بحيث $A \subseteq N(a, r)$.

تعريف المتتالية المحدودة : نقول أن المتتالية $\{x_n\}$ في الفضاء المتري محدودة إذا كانت مجموعة عناصرها محدودة .

مثال: ليكن $x = \mathbb{R}$ ، $(\mathbb{R}, |.|)$، ما هي $N(0, \varepsilon_1)$ ، $N(1, \varepsilon_2)$ ؟؟ على المجال $]-1, 5[$ مجموعة مفتوحة .

الــحـل

$$N(0, \varepsilon_1) = \{x \in \mathbb{R} \,;\, d(x, 0) < \varepsilon_1\} = \{x \in \mathbb{R} \,;\, |x - 0| < \varepsilon_1\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \,;\, |x| < \varepsilon_1\} = \{x \in \mathbb{R};\, -\varepsilon_1 < x < \varepsilon_1\} =]-\varepsilon_1, \varepsilon_1[$$

$$N(1, \varepsilon_2) = \{x \in \mathbb{R} \,;\, d(x, 1) < \varepsilon_2\} = \{x \in \mathbb{R} \,;\, |x - 1| < \varepsilon_2\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \,;\, -\varepsilon_2 < x - 1 < \varepsilon_2\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \,;\, 1 - \varepsilon_2 < x < \varepsilon_2 + 1\} =]1 - \varepsilon_1, 1 + \varepsilon_2[$$

انتهت المحاضرة

إعداد: ناريمان جلو – آية اليافي – هالة مصطفى