◄ حل التمارين المطلوبة من الكتاب .

الفصل الأول

التمرين الأول : لتكن G زمرة تبديلية منتهية وليكن $Card\ G = m$.

١. أثبت أنه أياً كان $n, t \in Z$ بحيث $n = t(mod\ m)$ فإن $ng = tg$ وذلك أياً كان $g \in G$.

٢. أثبت أن G هي مودول على الحلقة Z/mZ بالنسبة الى قانون التشكيل الخارجي $(.)$:

$$(.) \quad : \quad \frac{Z}{mZ} \times G \to G$$
$$\left(\frac{n}{mZ}, g\right) \to \quad ng$$

الحل :

١) محذوف.

٢) إن G زمرة تبديلية فرضاً .

ليكن $n_1 + mZ \in \frac{Z}{mZ}$ ، $n + mZ$ و $g, g_1 \in G$

- $(1 + mZ).g = 1.g = 1$
- $((n + mZ) + (n_1 + mZ)).g = ((n + n_1) + mZ).g = (n + n_1).g$

$$= ng + n_1g = (n + mZ).g + (n_1 + mZ).g$$

- $(n + mZ).(g + g_1) = n.(g + g_1) = ng + ng_1$

$$= (n + mZ).g + (n + mZ).g_1$$

- $(n + mZ).((n_1 + mZ).g) = (n + mZ).(n_1.g) = n.(n_1.g)$

$$(n.n_1).g = ((n + mZ).(n_1 + mZ)).g$$

ومنه G مودول على Z/mZ .

التمرين الخامس : لتكن R حلقة تبديلية وليكن M مودولاً على R . من أجل كل عنصر $r \in R$ نأخذ المجموعتين :

$$rM = \{rm \;\; ; \;\; m \in M\}$$
$$M_r = \{m \in M \;\; ; \;\; rm = 0\}$$

١) أثبت أن كلاً من $rM \; , \; M_r$ مودول جزئي من المودول M .

٢) اذا كان $R = Z$ حلقة الاعداد الصحيحة و $M = Z/nZ$, واذا فرضنا $n = rs$ و s, r أوليان فيما بينهما . فأثبت أن $rM = M_s$.

الحل :

١) - إن $rM \neq \emptyset$ وذلك لان $r0 \in rM$ وأن $rM \subseteq M$

ليكن $rm \, , rm_1 \in rM$ وليكن $\alpha \, , \beta \in R$ ولنثبت أن

$$\alpha(rm) + \beta(rm_1) \in rM$$

$$\alpha(rm) + \beta(rm_1) = (\alpha r)m + (\beta r)m_1 = (r\alpha)m + (r\beta)m_1$$

$$= r(\alpha m) + r(\beta m_1) \in rM$$

ومنه المجموعة الأولى تشكل مودول جزئي من M.

- إن $M_r \neq \emptyset$ وذلك لان $0 \in M_r$ وأن $M_r \subseteq M$

ليكن $m \, , m_1 \in M_r$ وليكن $\alpha \, , \beta \in R$ ولنثبت أن

$$\alpha m + \beta m_1 \in M_r \Leftrightarrow r(\alpha m + \beta m_1) = 0$$

ولدينا حسب تعريف المجموعة M_r اي $rm = 0 \quad , \quad rm_1 = 0$

$$r(\alpha m + \beta m_1) = (r\alpha)m + (r\beta)m_1 = \alpha(rm) + \beta(rm_1) = \alpha 0 + \beta 0 = 0$$

$$\Longrightarrow \alpha m + \beta m_1 \in M_r$$

ومنه المجموعة الثانية تشكل مودول جزئي من M .

٢) ليكن $x \in rM = r(Z/nZ)$ ومنه $x = r(m+nZ)$

ولكن لدينا $n(m+nZ) = 0_{Z/nZ} = nZ$

ولدينا $n = rs$ فيصبح لدينا $(rs)(m+nZ) = nZ$

ومنه $(sr)[m+nZ] = s\big(r(m+nZ)\big) = nZ \Longrightarrow sx = 0_{\frac{Z}{nZ}} = nZ$

وبالتالي $x \in M_s$ وبالتالي $rM \subseteq M_s$.

<u>ولنثبت الاحتواء المعاكس</u>

ليكن لدينا $y = m + nZ \in M_s$ حسب تعريف M_s فإنه يوجد $sy = s(m+nZ) = nZ$

ولدينا فرضاً $d_1, d_2 \in Z \quad : \quad gcd(s,r) = d_1 r + s d_2 = 1$

لنضرب sy ب d_2 ونجمع للطرفين $(rd_1)(m+nZ)$ فيصبح لدينا

$$\underbrace{(rd_1 + sd_2)}_{=1}(m+nZ) = (rd_1)(m+nZ)$$

$$(m+nZ) = (rd_1)(m+nZ) = r\big(d_1(m+nZ)\big) \in rM$$

ومنه $y \in rM$ أي أن $M_s \subseteq rM$ ومنه $M_s = rM$.

<u>التمرين السادس :</u> لتكن A, B, C ثلاث مودولات جزئية من مودول M على حلقة R بحيث

$$A \subseteq B \quad , \quad A + C = B + C \quad , \qquad A \cap C = B \cap C$$

برهن أن $A = B$.

الحل :

من الفرض $A \subseteq B$ لنثبت الاحتواء المعاكس

ليكن $x \in B$ ومنه يوجد $a \in A$, $c, c_1 \in C$: $a + c = x + c_1$ وايضاً يصبح لدينا

$$\underbrace{a - x}_{\in B} = \underbrace{c_1 - c}_{C} \in B \cap C = A \cap C$$

وبالتالي يوجد $t \in A \cap C$ بحيث $a - x = t$ ومنه $x = \underbrace{a}_{\in a} - \underbrace{t}_{\in a} \in A$ ومنه يتم المطلوب ويكون

$$A = B$$

الفصل الثاني

التمرين الأول : لتكن R حلقة تبديلية وليكن $f : R \times R \to R$ تطبيقاً .

أثبت أن f تشاكل مودولي عندما وفقط عندما يوجد $a, \beta \in R$ بحيث :

$$\forall x, y \in R \quad : \quad f(x,y) = a.x + \beta.y$$

الحل :

$\Leftarrow$ لنفرض أن f تشاكل مودولي وبالتالي لنأخذ

$$\forall x, y \in R \quad : \quad f(x,y) = f\big((x,0) + (0,y)\big) = f\big(x(1,0) + y(0,1)\big)$$

$$= xf(1,0) + yf(0,1) = f(1,0)x + f(0,1)y$$

ولنرمز ب $f(1,0) = a$ و $f(0,1) = \beta$ ومنه نلاحظ وجود $a, \beta \in R$ بحيث

$$\forall x, y \in R \quad : \quad f(x,y) = a.x + \beta.y$$

$\Longrightarrow$ لنفرض انه يوجد $a, \beta \in R$ بحيث :

$$\forall x, y \in R \quad : \quad f(x,y) = a.x + \beta.y$$

ولنثبت ان f تشاكل مودولي أي

$$\forall (x,y), (x',y') \in R \times R \quad , \quad \forall \mu, \varphi \in R$$

$$f\big(\mu(x,y) + \varphi(x',y')\big) = f\big((\mu x, \mu y) + (\varphi x', \varphi y')\big) = f(\mu x + \varphi x', \mu y + \varphi y')$$

$$= a.(\mu x + \varphi x') + \beta.(\mu y + \varphi y') = a\mu x + a\varphi x' + \beta\mu y + \beta\varphi y'$$

$$= \mu(a.x + \beta.y) + \varphi(a.x' + \beta.y') = \mu f(x,y) + \varphi f(x',y')$$

وتم المطلوب .

التمرين الثاني :

ليكن $f: A \to B$ و $f': A' \to B'$ تشاكلين مودوليين ولنعرف التطبيق :

$$f \times f': A \times A' \to B \times B'$$

$$f \times f'(a, a') = \big(f(a), f'(a')\big) \quad : \quad (\forall (a, a') \in A \times A')$$

١) أثبت أن $f \times f'$ تشاكل مودولي .

٢) برهن أنه اذا كانت المتتاليتان :

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0 \qquad (1)$$

$$0 \to A' \xrightarrow{f'} B' \xrightarrow{g'} C' \to 0 \qquad (2)$$

تامتين فإن المتتالية :

$$0 \longrightarrow A \times A' \xrightarrow{f \times f'} B \times B' \xrightarrow{g \times g'} C \times C' \longrightarrow 0 \qquad (3)$$

تكون تامة .

الحل :

١)

$$\forall (a, a'), (a_1, a_1') \in A \times A'$$

$$(f \times f')\big(\mu(a, a') + \beta(a_1, a_1')\big) = (f \times f')\big((\mu a, \mu a') + (\beta a_1, \beta a_1')\big)$$

$$= (f \times f')(\mu a + \beta a_1, \mu a' + \beta a_1') = \big(f(\mu a + \beta a_1), f'(\mu a' + \beta a_1')\big)$$

$$= \big(f(\mu a) + f(\beta a_1), f'(\mu a') + f'(\beta a_1')\big)$$

$$= \big(f(\mu a), f'(\mu a')\big) + \big(f(\beta a_1), f'(\beta a_1')\big)$$

$$= \mu\big(f(a), f'(a')\big) + \beta\big(f(a_1), f'(a_1')\big)$$

ومنه $f \times f'$ تشاكل مودولي وتم المطلوب

٢) لنثبت أن المتتالية تامة

- لنثبت أنها تامة عند الحد $A \times A'$ أي لنثبت ان $f \times f'$ متباين

$$kerf \times f' = \{(m,n) \in A \times A' : f \times f'(m,n) = (0,0)\}$$

$$kerf \times f' = \{(m,n) \in A \times A' : \big(f(m), f'(n)\big) = (0,0)\}$$

$$kerf \times f' = \{(m,n) \in A \times A' : (f(m) = 0 \wedge f'(n) = 0\}$$

$$kerf \times f' = \{(m,n) \in A \times A' : m \in kerf \wedge n \in kerf' \ \}$$

$$kerf \times f' = kerf \times kerf'$$

ولما كانت المتتاليتان 1,2 تامتان فإن f, f' متباينان ومنه

$kerf \times f' = \{0\} \times \{0\}$ ومنه $f \times f'$ متباين .

- لنثبت انها تامة عند الحد $B \times B'$ أي لنثبت $Imf \times f' = kerg \times g'$

لدينا: $Imf \times f' = \{f \times f'(m', n') : (m', n') \in A \times A'\}$

$$Imf \times f' = \{(f(m'), f'(n')) : m' \in A, n' \in A'\}$$

$$Imf \times f' = Imf \times Imf'$$

ولدينا أيضا $kerg \times g' = \{(m,n) \in B \times B' : g \times g'(m,n) = (0,0)\}$

$$kerg \times g' = \{(m,n) \in B \times B' : \big(g(m), g'(n)\big) = (0,0)\}$$

$$kerg \times g' = \{(m,n) \in B \times B' : (g(m) = 0 \wedge g'(n) = 0\}$$

$$kerg \times g' = \{(m,n) \in B \times B' : m \in kerg \wedge n \in kerg' \ \}$$

$$kerg \times g' = kerg \times kerg'$$

وبما أن المتتاليتين (1) و (2) تامتيين يكون لدينا

$Imf = kerg$ و $Imf' = kerg'$

ومنه $Imf \times f' = Imf \times Imf' = kerg \times kerg' = kerg \times g'$

أي ان المتتالية (3) تامة عند الحد $B \times B'$.

- لنثبت انها تامة عند الحد $C \times C'$ أي لنثبت ان $g \times g'$ غامر

لدينا: $Img \times g' = \{g \times g'(m', n'): (m', n') \in B \times B'\}$

$$Img \times g' = \{(g(m'), g'(n')): m' \in B, n' \in B'\}$$

$$Img \times g' = Img \times Img'$$

ولما كانت المتتاليتان 1,2 تامتان فإن g, g' غامرين ومنه

$$Img = C \quad \wedge \quad Img' = C'$$

ومنه

$$Img \times g' = Img \times Img'$$

ومنه $g \times g'$ غامر

التمرين الثالث : ليكن مخططاً تبادلياً من التشاكلات المودولية وفيه a, β, γ تماثلات مودولية أثبت أنه يكون السطر العلوي متتالية تامة عندما يكون السطر السفلي متتالية تامة .

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[d, "\gamma"] \\
A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C'
\end{tikzcd}$$

الحل :

لنثبت أن $Imf = kerg$ عندما $Imf' = kerg'$

$$\forall b \in kerg \,; g(b) = 0$$

$$\Rightarrow \gamma(g(b)) = \gamma(0) = 0 \;\Rightarrow\; (\gamma o g)(b) = 0$$

$$\Rightarrow (g' o \beta)(b) = 0 \;\Rightarrow\; g'(\beta(b)) = 0$$

$$\Rightarrow \beta(b) \in kerg' = Imf'$$

$$\Rightarrow \exists a' \in A' \,; f'(a') = \beta(b)$$

$$\Rightarrow \exists t \in A \,; a(t) = a'$$

$$\Rightarrow f'\big(a(t)\big) = \beta(b) \Rightarrow (f'oa)(t) = \beta(b)$$

$$\Rightarrow (\beta of)(t) = \beta(b) \;\Rightarrow\; \beta\big(f(t)\big) = \beta(b)$$

$$\Rightarrow \beta(f(t) - b) = 0 = \beta(0)$$

$$\Rightarrow f(t) - b = 0 \;\Rightarrow\; f(t) = b \in Imf$$

$$kerg \subseteq Imf$$

<u>لنثبت الاحتواء المعاكس</u>

ليكن $b \in Imf$ وبالتالي $\exists t \in A \,;\; f(t) = b$

$$\Rightarrow \beta\big(f(t)\big) = \beta(b) \Rightarrow \;(\beta of)(t) = \beta(b)$$

$$\Rightarrow (f'oa)(t) = \beta(b)$$

$$\Rightarrow g'\big((f'oa)(t)\big) = g'\big(\beta(b)\big)$$

$$\Rightarrow \big(g'o(f'oa)\big)(t) = g'\big(\beta(b)\big)$$

$$\Rightarrow ((g'of')o\, a)(t) = g'\big(\beta(b)\big)$$

$$\Rightarrow (0oa)(t) = g'\big(\beta(b)\big)$$

$$\Rightarrow g'\big(\beta(b)\big) = 0 \Rightarrow (g'o\beta)(b) = 0$$

$$\Rightarrow (\gamma og)(b) = 0 \;\Rightarrow\; \gamma\big(g(b)\big) = 0 = \gamma(0)$$

$$\Rightarrow g(b) = 0 \Rightarrow b \in kerg$$

ومنه $Imf \subseteq kerg$ أي $Imf = kerg$ وتم المطلوب

التمرين الرابع : ليكن

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & \\
 & & A'_2 \arrow[d, "\tau_2"] \arrow[dr, "a"] & & \\
0 \arrow[r] & A'_1 \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\tau_1"] \arrow[dr, "\beta"'] & A \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_2"] & A''_1 \arrow[r] & 0 \\
 & & A''_2 \arrow[ur, "g"'] \arrow[d] & & \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

مخططاً تبادلياً من التشاكلات المودولية التاي سطراه وعموده متتاليتان تامتان والمطلوب :

١) أثبت أن a, β تشاكلان صفريان .

٢) أثبت أن f, g تماثلان .

الحل :

١) **لنثبت** أن a هو التشاكل الصفري . ليكن $x \in A'_2$

بما أن المخطط تبديلي فإن $a(x) = \pi_1 \, o \, \tau_2(x)$ ولكن أيضاً $\pi_1 = g \, o \, \pi_2$ بالتعويض ينتج مايلي

$$a(x) = (g \, o \, \pi_2) o \, \tau_2(x) = g(\pi_2 o \, \tau_2)(x) = go0(x) = 0$$

لان $\pi_2 o \, \tau_2(x) = 0$ وذلك لان تركيب أي تشاكلين من متتالية تامة هو الصفر ومنه

$a = 0$ وبنفس الطريقة يبرهن على ان β تشاكل صفري .

ثانياً : لنثبت أن f تماثل .

- إن f هو تطبيق تشاكل فرضاً . لنثبت أن f متباين أي $kerf = \{0\}$

ليكن $x \in kerf$ فإن $x \in A_1'$ بحيث $f(x) = 0$ ولنأخذ صورته بالنسبة ل τ_2

$$\tau_2(f(x)) = \tau_2(0) \Longrightarrow \tau_2 of(x) = 0_A$$

وكون المخطط تبديلي $\tau_1(x) = 0_A$

وأن τ_1 تشاكل فإن $\tau_1(x) = \tau_1(0)$ وكون τ_1 متباين لان المتتالية تامة يكون $x = 0$ أي أن f متباين.

- لنثبت أن f غامر : ليكن $a_2' \in A_2'$ ولنبرهن أنه $\exists a_1' \in A_1' \; : \; f(a_1') = a_2'$

$$\tau_2(a_2') \in A \Longrightarrow \pi_1\big(\tau_2(a_2')\big) \in A_1''$$

$$\Longrightarrow \pi_1\big(\tau_2(a_2')\big) = a(a_2') = 0 \Longrightarrow \pi_1\big(\tau_2(a_2')\big) = 0$$

$$\Longrightarrow \tau_2(a_2') \in ker\pi_1 = Im\tau_1$$

$$\Longrightarrow \exists a_1' \in A_1' \;\; ; \; \tau_1(\, a_1') = \tau_2(a_2')$$

$$\Longrightarrow \tau_2 of(\, a_1') = \tau_2\big(f(\, a_1')\big) = \tau_2(a_2')$$

$$\Longrightarrow f(\, a_1') = (a_2')$$

أي أنه f غامر ومنه فإن f تماثل وتم المطلوب.وبنفس الطريقة يثبت أن g تماثل .

التمرين الخامس : ليكن

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "f'"] & A \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "f"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "g'"] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"] & B'' \arrow[r] \arrow[d, "g''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C' \arrow[d] & C \arrow[d] & C'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

مخططً تبادلياً من التشاكلات المودولية أعمدته الثلاثة متتاليات تامة وسطراه العلويان متتاليتان تامتان

برهن أنه يوجد تشاكلين وحيدين :

$$a'' : C' \to C \quad , \quad \beta'': C \to C''$$

من أجلها يصبح السطر السفلي متتالية تامة ويجعل المخطط الناتج تبادلياً .

الحل :

$$a'' : C' \to C$$

$$c' \to a''(c') = goa(b') \quad : \quad g'(b') = c'$$

$$\forall\, c_1', c_2' \in C' \ ; \ \forall\, \varphi, \mu \in A$$

- a'' تطبيق لأن : $c_1' = c_2'$ بما أن g' غامر فإنه

$$\exists\, b'_1, b'_2 \in B' \ : g'(b'_1) = c_1' \ , \qquad g'(b'_2) = c_2'$$

لدينا $c_1' = c_2' \ \Leftarrow \ g'(b'_1) = g'(b'_2)$

$$\Rightarrow \ g'(b'_1) - g'(b'_2) = g'(b'_1 - b'_2) = 0 \ \Rightarrow b'_1 - b'_2 \ \in ker g'$$

إن $(g\ o\ a)\ of' = 0$ لأنه

$$\forall x \in A' \ : \ g\left(aof'(x)\right) = g\big(foa'(x)\big) = gof\big(a'(x)\big) = 0oa'(x) \ = 0$$

ومنه فإن $Imf' \subseteq ker(goa)$ وبالتالي وبما أن $ker g' = Imf'$ فيكون $ker g' \subseteq ker(goa)$.

فإنه $b'_1 - b'_2 \ \in ker g' \subseteq ker(goa)$

$$\Rightarrow goa(b'_1 - b'_2) = 0 \ \xrightarrow{\text{تشاكل } goa} \ goa(b'_1) = goa(b'_2)$$

a'' حسب قاعدة ربط $\ \Rightarrow a''(c_1') = a''(c_2')$

- لنتأكد من كون المخطط تبديلي لنثبت أن : $a'' \circ g' = goa$

$$\forall b' \in B' \qquad : \ a'' \circ g'(b') = a''\big(g'(b')\big) = a''(c') = goa(b')$$

$$\Rightarrow \ a'' \circ g'(b') = goa(b') \ \ \Rightarrow \ a'' \circ g' = goa$$

ومنه نجد التشاكل a'' المطلوب ويحقق لخاصة التبديلية

- <u>**إن a'' تشاكل لان**</u>

$$\forall\, c_1', c_2' \in C' \ ; \ \forall\, \varphi, \mu \in A$$

بما أن g' غامر فإنه

$$\exists\, b'_1, b'_2 \in B' \ : g'(b'_1) = c_1' \ , \qquad g'(b'_2) = c_2'$$

<u>وليكن</u>

$$a''(\varphi c_1' + \mu c_2') = a''\big(\varphi g'(b'_1) + \mu g'(b'_2)\big) = a''\left(g'\big(\varphi b'_1 + \mu b'_2\big)\right)$$

$$a'' \circ g'\big(\varphi b'_1 + \mu b'_2\big) = goa\big(\varphi b'_1 + \mu b'_2\big) = \ g\big(a(\varphi b_1') + a(\mu b_2')\big)$$

$$= g\big(\varphi a(b_1') + \mu a(b_2')\big) = \varphi\ goa(b_1') + \mu\ goa(b_2')$$
$$= \varphi a''(c_1') + \mu a''(c_2')$$

- لنثبت انه وحيد

لنفرض وجود $h'': C' \to C$ بحيث $h'' \circ g' = goa$ ولدينا ايضاً $a'' \circ g' = goa$

ومنه $a'' \circ g' = h'' \circ g'$ وكون g' غامر فهو قابل للاختصار من اليمين ومنه $a'' = h''$

أي أن a'' وحيد .

بأسلوب مماثل نثبت وجود β'' وبقي اثبات أن السطر السفلي متتالية تامة أي اثبات أن

a'' متباين و $Ima'' = ker\beta''$ و ايضاً β'' غامر.

- a'' متباين لأن : $a''(c_1') = a''(c_2')$ حيث $g'(b_2') = c_2'$, $g'(b_1') = c_1'$

وبالتالي $goa(b'_1) = goa(b'_2)$

ومنه $goa(b'_1 - b'_2) = 0$ أي أن $b'_1 - b'_2 \in ker g' \subseteq ker(goa)$

وبالتالي $g'(b'_1 - b'_2) = g'(b'_1) - g'(b'_2) = 0$

أي $g'(b'_1) = g'(b'_2)$ ومنه $c_1' = c_2'$.

- اثبات $Ima'' = ker\beta''$

$$\beta''o\ a'' = 0 \Leftrightarrow Ima'' \subseteq ker\beta''$$

كون السطر الثاني متتالية تامة فيكون $\beta o\ \alpha = 0$ وليكن $\forall b' \in B'$:

$$(\beta o\ \alpha)(b') = 0 \Longrightarrow \beta\big(\alpha(b')\big) = 0$$

نصور وفق g'' فيصبح لدينا $g''\Big(\beta o\ \alpha(b')\Big) = g''(0) = 0$

$$(g''o\beta o\ \alpha)(b') = 0 \Longrightarrow \beta''o\ a''o\ g'(b') = 0$$

$$\beta'' o\, a''\left(\underbrace{g'(b')}_{\in C'}\right) = 0 \Rightarrow \beta'' o\, a'' = 0$$

$$\Rightarrow Ima'' \subseteq ker\beta''$$

لنثبت الاحتواء المعاكس

ليكن $x \in ker\beta''$ ومنه $\beta''(x) = 0$ وايضاً $x \in C$ وأن g غامر ومنه يوجد $b \in B$ بحيث

$g(b) = x$ ومنه $\beta''(g(b)) = g''(\beta(b)) = 0$ فيصبح لدينا $\beta(b) \in ker g'' = Imf''$

ومنه $\exists a'' \in A'' \;:\; f''(a'') = \beta(b)$ وبما أن β' غامر فإنه $\exists y \in A :\; \beta'(y) = a''$

وبالتعويض يصبح لدينا $f''\left(\beta'(y)\right) = \beta(b)$ ولان المخطط تبديلي ينتج ما يلي

$\beta(f(y)) = \beta(b)$ وأن β تشاكل ومنه $\beta(b - f(y)) = 0$ أي $b - f(y) \in ker\beta = Ima$

ومنه $\exists b' \in B'$ بحيث $a(b') = b - f(y)$ ولنأخذ صورة ال b' وفق g' وليكن

$g'(b') = c'$ حيث $c' \in C'$

$$\Rightarrow a''(c') = a''(g'(b')) = g(a(b')) = g(b - f(y)) = g(b) - g(f(y))$$

$$= g(b) - 0 = x$$

وبالتالي $x \in Ima''$

$$\Rightarrow ker\beta'' \subseteq Ima''$$

$$\Rightarrow ker\beta'' = Ima''$$

- لنثبت أن β'' غامر

ليكن $x \in C''$ ومنه بما ان g'' غامر فإن يوجد $b'' \in B''$ بحيث $g''(b'') = x$ وايضاً β غامر ومنه يوجد $b \in B$ بحيث $\beta(b) = b''$ وبالتالي $g''\left(\beta(b)\right) = x$ ومنه $\beta''(g(b)) = x$ وبالتالي يكون β'' غامر ومنه السطر السفلي هو متتالية تامة .

الفصل الثالث

التمرين الأول: لتكن R حلقة تبديلية ولنأخذ التطبيق

$$f : R^3 \to R^2$$

$$f(x,y,z) = (x,y) \quad ; \quad (\forall (x,y,z) \in R^3)$$

المطلوب :

١) أثبت أن f تشاكل مودولي غامر .

٢) بفرض أن :

$$D = \{(0,0,z) \ ; \ \ z \in R\} \subseteq R^3$$

أثبت أن D مودول جزئي من المودول R^3 وأن $R^3/D \cong R^2$.

الحل :

١)

$$(\forall (x,y,z),(x_1,y_1,z_1) \in R^3) \quad ; \ \forall \alpha,\beta \in R$$

$$f(\alpha(x,y,z) + \beta(x_1,y_1,z_1)) = f\big((\alpha x,\alpha y,\alpha z) + (\beta x_1,\beta y_1,\beta z_1)\big)$$

$$= f\big((\alpha x + \beta x_1, \alpha y + \beta y_1, \alpha z + \beta z_1)\big) = (\alpha x + \beta x_1, \alpha y + \beta y_1)$$

$$= (\alpha x,\alpha y) + (\beta x_1,\beta y_1) = \alpha(x,y) + \beta(x_1,y_1)$$

$$= \alpha f(x,y,z) + \beta f(x_1,y_1,z_1)$$

ومنه f تشاكل ولنثبت انه غامر

ليكن $(x,y) \in R^2$ ومنه يوجد $(x,y,0) \in R^3$ بحيث

$$f(x,y,0) = (x,y)$$

٢) إن $D \neq \emptyset$ لان $(0,0,0) \in D$

ليكن $(0,0,z),(0,0,z_1) \in D$ وليكن $a,b \in R$

ولنثبت أن $a(0,0,z)+b(0,0,z_1) \in D$

$$a(0,0,z)+b(0,0,z_1)=(0,0,az)+(0,0,bz_1)=(0,0,az+bz_1) \in D$$

ومنه D مودول جزئي من المودول R^3

حسب مبرهنة التماثل الأولى فإن

$$R^3/kerf \cong R^2$$

ولنثبت أن $D = kerf$

$$kerf = \{(x,y,z):\ f(x,y,z)=(0,0)\} = \{(x,y,z):\ (x,y)=(0,0)\} = D$$

ومنه التماثل محقق .

التمرين الثاني: ليكن $f: M \to N$ تشاكلاً مودولياً . نرمز لمرافق نواة التشاكل f بالرمز $coker\ f$ ونعرفها بأنها المودول N/Imf ، ولنأخذ الغمر القانوني :

$$\pi : N \to coker\ f$$

والتباين القانوني :

$$J : ker\ f \to M$$

المطلوب إثبات صحة القضيتين الاتيتين :

١) اذا كان التشاكل f متبايناً فإن $M \cong ker\ \pi$.

٢) اذا كان التشاكل f غامراً فإن $N \cong coker\ J$

الحل :

١) إن $f: M \to N$ تشاكل مودولي وحسب مبرهنة التماثل الأولى نجد $M/kerf \cong Imf$

بمان أن f متباين فإن $M \cong Imf$ وليتم المطلوب لنثبت أن $Imf = ker\ \pi$.

لدينا تشاكل الغمر القانوني

$$\pi : N \to coker\ f = N/Imf$$

نواته هي Imf أي أن $Imf = ker\ \pi$ ومنه بالتعويض يتم التماثل المطلوب أي

$$M \cong ker\ \pi$$

٢) بما أن f غامر وحسب مبرهنة التماثل الأولى فإن $M/kerf \cong N$ ونريد اثبات أن

$$N \cong coker\ J = M/ImJ$$

وليتم المطلوب لنثبت أن $ImJ = kerf$

إن

$$J : ker\ f \to M$$

هو التباين القانوني أي $ImJ = kerf$.

ومنه بالتعويض يكون

$$N \cong coker\ J = M/ImJ$$

الفصل الرابع

التمرين الأول: لتكن $(M_i)_{i=1,,,,,,n}$ أسرة منتهية من المودولات الجزئية من مودول M على حلقة R

وليكن، $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ وليكن N_k مودولاً جزئياً من $M_k \ :\ k = 1,2,,,,,,,n$

وليكن $N = \sum_{i=1}^{n} N_i$.

أثبت أن :

$$1) \qquad N = \bigoplus_{i=1}^{n} N_i$$

$$2) \qquad M/N \cong \bigoplus_{i=1}^{n} (M_i/N_i)$$

الحل :

١) ليكن $n \in N$ ومنه فإن $n = \sum_{i=1}^{n} n_i$ وأن $n_i \in M_i \;:\; \forall i \in \{1,,,,,n\}$

وأن $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ ومنه كل عنصر منها يكتب بشكل وحيد لان M مجموع مباشر ومنه فإن

$N = \bigoplus_{i=1}^{n} N_i$ محقق .

٢) ليكن $m + N \in M/N$ ومنه $m \in M$ وأن $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ ومنه

$$m + N = (m_1 + m_2 + \cdots \dots \dots \dots . + m_n) + N$$
$$= (m_1 + N) + (m_2 + N) + \cdots \dots \dots (m_n + N)$$

ولنأخذ العلاقة التالية

$$f \;:\; M/N \to \bigoplus_{i=1}^{n} (M_i/N_i)$$

$$m + N = (m_1 + N) + \cdots \dots \dots (m_n + N) \to \big((m_1 + N_1),,,,,,(m_n + N_n)\big)$$

ليكن $\forall \alpha, \beta \in R \;;$ $m + N, m' + N \in \frac{M}{N}$ بحيث

$$m + N = m' + N$$

$$(m_1 + N) + \cdots \dots \dots (m_n + N) = (m'_1 + N) + \cdots \dots \dots (m'_n + N)$$

$$\big((m_1 + N_1), \dots ,,,,(m_n + N_n)\big) = \big((m'_1 + N_1), \dots \dots ,,(m'_n + N_n)\big)$$

ومنه فإن f تطبيق وايضاً هو متباين وغامر لان

ليكن $\big((m_1 + N_1), (m_2 + N_2), \dots ,,,(m_n + N_n)\big) \in \bigoplus_{i=1}^{n} (M_i/N_i)$

ومنه فإن يوجد $m \in M$ بحيث $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ أي

$$f(m + N) = \big((m_1 + N_1), (m_2 + N_2),,, \dots ,,(m_n + N_n)\big)$$

بمان أن الكتابة وحيدة فإن f غامر ومتباين .

ولنثبت أن f تشاكل.

$$f\big(\alpha(m+N)+\beta(m'+N)\big) = f\big((\alpha m+N)+(\beta m'+N)\big)$$

$$= f\big((\alpha m+\beta m')+N)\big) = \big((am_1+\beta m_1')+N_1,,\ldots,,(am_n+\beta m_n')+N_n\big)$$

$$=(am_1+N_1,,\ldots\ldots,,am_n+N_n)+(\beta m_1'+N_1,,\ldots,,\beta m_n'+N_n)$$

$$=a(m_1+N_1,,\ldots\ldots,,m_n+N_n)+\beta(m_1'+N_1,,\ldots,,m_n'+N_n)$$

$$=af(m+N)+\beta f(m'+N)$$

ومنه التماثل يكون محقق .

الفصل الخامس (لم يطلب شيء)

الفصل السادس

التمرين الثاني : لتكن M,N مودولين حرين وليكن $f\ :\ M\to N$ تشاكلاً مودولياً ، برهن أن القضيتين التاليتين متكافئتان :

- التشاكل $\boldsymbol{f}$ تماثل .
- اذا كانت $(\boldsymbol{a_i})_{i\in I}$ قاعدة للمودول $\boldsymbol{M}$ فإن $\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a_i})\big)_{i\in I}$ قاعدة للمودول $\boldsymbol{N}$.

- الحل :

$\Leftarrow$ لنفرض أن التشاكل f تماثل ولنثبت أنه اذا كانت $(a_i)_{i\in I}$ قاعدة للمودول M فإن $\big(f(a_i)\big)_{i\in I}$ قاعدة للمودول N

أي $N\cong M$ وليكن $x\in M$ فإن $(*)$ $\ :r_i\in A$ $x=\sum_{i\in I} r_i.a_i$ ولنأخذ صورته بالنسبة ل f

$$f(x)=f\left(\sum_{i\in I} r_i.a_i\right)=\sum_{i\in I} r_i\, f(a_i)$$

ومنه $f(x)\in N$ وبالتالي

$$\Longrightarrow \exists r_i \in A \;\; ; \; f(x) = \sum_{i\in I} r_i \, f(a_i)$$

ولكن حسب $r_i = 0 \;\; (*)$ وذلك لان $(a_i)_{i\in I}$ قاعدة ل M ومنه $\left(f(a_i)\right)_{i\in I}$ قاعدة للمودول N .

$\Longrightarrow$ لنفرض أنه اذا كانت $(a_i)_{i\in I}$ قاعدة للمودول M فإن $\left(f(a_i)\right)_{i\in I}$قاعدة للمودول N ولنثبت أن f تماثل .

إن f تشاكل مودولي فرضاً بقي اثبات أن f متباين و غامر

ليكن $y \in N$ ومنه $r_i \in A$: $y = \sum_{i\in I} r_i \, . \, f(a_i)$ وأن $(a_i)_{i\in I}$ قاعدة ل M أي أن يوجد عنصر $x \in M$ بحيث

$x = \sum_{i\in I} r_i . a_i$ ومنه $f(x) = \sum_{i\in I} r_i \, . \, f(a_i) = y$ و هذه الكتابة وحيدة لان $(a_i)_{i\in I}$

و $\left(f(a_i)\right)_{i\in I}$ قاعدة للمودول N, M على الترتيب أي أن f متباين و غامر ومنه f تماثل .

انتهت التمارين

<u>ملاحظة : يجب ذكر تعليلات الخطوات أي الانتقال بين الخطوات .</u>

إعداد: احمد أبو التوت – شهد الحايك البوشي