نظري

◄ دكتورة المادة: ملك مارديني ◄ المحاضرة: الأولى

◄ عنوان المحاضرة: حل المعادلة بطريقة النشر بشكل سلاسل قوى

المحتوى العلمي :

١ـالمعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية وبأمثال متغيرة.

٢ـالنقطة العادية والنقطة الشاذة../دراسة نوع نقطة اللانهاية (∞).

٤ـأمثلة لبعض الأفكار المذكورة مسبقاً.

المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية وبأمثال متغيرة

يكون شكلها على النحو التالي:

$$y'' + p.y' + q.y = 0 \ldots (1)$$

- يمكن التعبير عن الحل العام للمعادلة التفاضلية (1) على شكل سلاسل قوى ل x :

متسلسلة القوى حول x_0 هي كل متسلسلة من الشكل:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \ldots (2)$$

وتسمى متسلسلة القوى ل$(x - x_0)$ ، وتسمى a_n عوامل (أمثال) متسلسلة القوى، أما x_0 مركز المتسلسلة.

– متى تكون هذه المتسلسلة متقاربة ومتى تكون متباعدة ؟؟!

تكون هذه المتسلسلة متقاربة إذا كانت النهاية:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{m} a_n (x - x_0)^n \ldots (3)$$

موجودة ومحدودة وتسمى هذه النهاية في حال وجدت (مجموع متسلسلة القوى).

<u>أما</u> إذا كانت النهاية **<u>غير موجودة</u>** نقول إن المتسلسلة متباعدة.

تعريف 1: نقول عن الدالة $y = f(x)$ أنها دالة تحليلية عند x_0 إذا كانت موجودة ومحدودة عند النقطة x_0 { نعوض قيمة x_0 في الدالة لنرى فيما إذا كانت موجودة ومحدودة أم لا} .

تعريف 2: نسمي النقطة x_0 نقطة عادية للدالة $y = f(x)$ إذا كانت الدالة $f(x)$ تحليلية عند النقطة x_0 .

مثال: لنأخذ المعادلة:

$$f(x) = 2x^2 - 5$$

عند النقطة $x_0 = 3$.

الحل:

$$f(3) = 13$$

موجودة ومحدودة بالتالي النقطة $x_0 = 3$ نقطة عادية.

تعريف 3 : نسمي النقطة x_0 نقطة شاذة للدالة $y = f(x)$ إذا كانت الدالة $f(x)$ غير تحليلية عند النقطة x_0.

مثال:

$$f(x) = \frac{2}{x-5}$$

الحل:

$$f(x) = \frac{2}{x-5}$$

جميع النقاط عادية ماعدا النقطة $x_0 = 5$ هي نقطة شاذة لأن $f(5) = \frac{2}{0} = \infty$ غير محدودة وغير موجودة.

تعريف 4 : نسمي النقطة x_0 نقطة عادية للمعادلة التفاضلية (1) إذا كانت x_0 نقطة عادية لكل من p, q معاً.

تعريف 5 : نسمي النقطة x_0 نقطة شاذة للمعادلة التفاضلية (1) إذا كانت x_0 نقطة شاذة ل p أو q .

مثال:

$$\boxed{1}\ y'' + \underbrace{\frac{1}{x}}_{p}.y' + \underbrace{\frac{2}{x-5}}_{q}.y = 0$$

الحل

جميع النقاط هي نقاط عادية باستثناء النقاط:

$x_0 = 0$ هي نقطة شاذة بالنسبة ل p ، $x_0 = 5$ هي نقطة شاذة ل q .

$$\boxed{2}\ y'' + 2x^2.y' + x.y = 0$$

الحل

جميع النقاط هي نقاط عادية {بما أن p,q هي توابع صحيحة فلا يوجد لها نقاط شاذة} .

نقطة اللانهاية (∞) العادية والشاذة للمعادلة التفاضلية (1):

دراسة نوع نقطة ال (∞) هل هي عادية أم شاذة؟؟!

لتحديد نوع نقطة ال (∞) للمعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية بأمثال متغيرة نجري التحويل:

$$t = \frac{1}{x}$$

$$d(t) = -\frac{d(x)}{x^2} \Rightarrow \frac{d(t)}{d(x)} = -\left(\frac{1}{x}\right)^2 = -t^2$$

لنوجد y'_x, y''_x بدلالة y'_t, y''_t :

$$y'_x = \frac{d(y)}{d(x)} = \underbrace{\frac{d(y)}{d(t)}.\frac{d(t)}{d(x)}}_{\text{قانون الاشتقاق الضمني}} = \frac{d(y)}{d(t)}.(-t^2) \Rightarrow y'_x = -t^2.y'_t$$

$$y''_x = \frac{d}{d(x)}(y'_x) = \frac{d}{d(x)}(-t^2.y'_t) = \frac{d}{d(t)}(-t^2.y'_t).\frac{d(t)}{d(x)}$$
$$= (-2t.y'_t - t^2.y''_t).(-t^2) = 2t^3.y'_t + t^4.y''_t$$

$$\Rightarrow y''_x = t^4.y''_t + 2t^3.y'_t$$

والآن نعوض كلاً من y''_x, y'_x في المعادلة التفاضلية (1) :

$$y''_x + p.y' + q.y = 0$$

$$t^4.y''_t + 2t^3.y'_t + \mathrm{p}.(-\mathrm{t}^2.y'_t) + q.y_t = 0$$

$$t^4.y''_t + (2t^3 - pt^2).y'_t + q.y_t = 0$$

نقسم على أمثال y''_t :

$$y''_t + \frac{2t^3 - pt^2}{t^4}.y'_t + \frac{q}{t^4}.y_t = 0 \ldots (*)$$

ولا ننسى أن p, q بعد إجراء التحويل أصبحت توابع ل t بدلاً من x .

ولكن: $t = 0 \xrightarrow{x=\infty} t = \frac{1}{x}$ ونحن ندرس نوع النقطة (∞) وبعد التحويل بتنا ندرس النقطة $t = 0$ **هنا يصبح لدينا:**

١- إذا كانت $t = 0$ نقطة عادية للمعادلة $(*)$ فإن $x = \infty$ هي نقطة عادية للمعادلة (1) .

٢- إذا كانت $t = 0$ نقطة شاذة للمعادلة $(*)$ فإن $x = \infty$ هي نقطة شاذة للمعادلة (1) .

هدفك، إصرارك، صبرك، قوة ايمانك بالله، ثقتك في قدراتك، كلها أدوات لتصبح ما تريد..!!

انتهت المحاضرة

إعداد: بسمة نصر الله ورهف النقشي ودعاء الرحيل