نظري

◄ دكتور المادة: أحمد هايل

◄ المحاضرة: الأولى عنوان المحاضرة: الفضاءات المترية

الطوبولوجيا تعني علم دراسة المكان

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ الفضاءات المترية و دالة المسافة (المترك)

٢ـ بعض دوال المسافة الشهيرة و أمثلة عن دوال مسافة أخرى.

الفضاءات المترية : لتكن X مجموعة غير خالية و ندعو التابع d المعرف بالشكل التالي:

$$d: X \times X \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto d(x,y)$$

بأنه **تابع مسافة** على X إذا تحقق ما يلي :

$$1 - \forall x,y \in X\ ; d(x,y) \geq 0$$
$$2 - \forall x,y \in X\ : d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$
$$3 - \forall x,y \in X\ ; d(x,y) = d(y,x)$$
$$4 - \forall x,y,z \in X\ ; d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

و ندعو عندئذٍ الثنائية (X,d) فضاءً مترياً أو للاختصار الفضاء x

و لنفسر قليلاً الشروط السابقة :

الشرط الأول : يجب أن يكون تابع المسافة غير سالب (أكبر أو يساوي الصفر دوما)

الشرط الثاني : إذا كان بعد نقطة عن نفسها معدوم فإن النقطتان حتماً متساويتان ($x = y$)

الشرط الثالث : تابع المسافة يحقق خاصية التناظر ((المسافة بين y و x نفسها المسافة بين xوy))

الشرط الرابع : متراجحة المثلث : و بالتالي حتى نقول عن تابع ما إنه تابع مسافة لا بد أن يحقق الشروط الأربعة السابقة و في حال كان التابع لا يحقق أحد هذه الشروط على الأقل لن يكون تابع مسافة .

إذا كان d تابع مسافة على X: ندعو عناصر X نقاط الفضاء X.

$$d(x,y) \neq 0 \leftrightarrow x \neq y$$

◄**ملاحظة** : إذا كان $Y \neq 0$ نلاحظ أن التابع dy هو مقصور d على $Y \times Y$ فنحصل على فضاء متري جديد هو (y, dy) ندعوه الفضاء المتري الجزئي في X (حيث Y محتواة في X)

مثال (١): ليكن $X = \mathbb{R}$ و نعرف التابع d بالشكل : $d: X \times X \to \mathbb{R}$

$\forall x, y \in \mathbb{R} \; ; \; d(x,y) = |x-y|$ أثبت أن d تشكل دالة مسافة على X و $(R \,, d)$ فضاء متري

الحل:

حتى يكون d تابع مسافة يجب أن تحقق الشروط الأربعة الواردة في تعريف دالة المسافة :

الشرط الأول :(غير سالب) $\forall x, y \in \mathbb{R} \,; d(x,y) = |x-y| \geq 0$

و ذلك حسب خواص القيمة المطلقة

الشرط الثاني : $\forall x, y \in \mathbb{R} \,; d(x,y) = 0 \iff |x-y| = 0 \Leftrightarrow x-y = 0 \Leftrightarrow x = y$

الشرط الثالث : $\forall x, y \in \mathbb{R}; d(x,y) = |x-y| = |-(y-x)| = |y-x| = d(y,x)$

الشرط الرابع:(متراجحة المثلث) : $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \,; d(x,z) = |x-z| =$

$$|(x-y)+(y-z)| \underset{\text{خواص قيمة مطلقة}}{\leq} \underbrace{|x-y|}_{d(x,y)} + \underbrace{|y-z|}_{d(y,z)}$$

و هذا يبين أن : $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

وبالتالي d تابع مسافة على X وأن $(R \,, d)$ فضاء متري ندعوه الفضاء المتري الحقيقي المألوف في R

مثال(٢): ليكن $X = \mathbb{R}^2$ و نعرف التابع d بالشكل : $d: X \times X \to \mathbb{R}$

$$\forall x = (x_1, x_2), y = (y_1 \,, y_2) \in R \,; d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$$

- أثبت أن d تشكل دالة مسافة على X و $(R^2 \,, d)$ فضاء متري

الحل :

حتى يكون d تابع مسافة يجب أن تحقق الشروط الأربعة الواردة في تعريف دالة المسافة :

الشرط الأول (غير سالب): $\forall \; x, y \in R \;\; ; d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2} \;\; \geq 0$

الشرط الثاني : $\forall \; x, y \in R; \;\; d(x,y) = 0 \;\; \Leftrightarrow (x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 = 0$

و لكن إذا كان مجموع مقادير غير سالبة هو الصفر فإن كل من هذه المقادير معدوم أي :

$$\Rightarrow (x_1 - y_1) = (x_2 - y_2) \Rightarrow x = y$$

الشرط الثالث (التناظر) $\forall\, x, y \in R\ ; d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} =$

$$\sqrt{\left(-(y_1 - x_1)\right)^2 + \left(-(y_2 - x_2)\right)^2} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} = d(y,x)$$

الشرط الرابع (متراجحة المثلث) :

$$\forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2), z = (z_1, z_2);\ d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$$

$$\sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2} \le \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} + \sqrt{(y_1 - z_1)^2 + (y_2 - z_2)^2}$$

وللسهولة نفرض ان: $a_1 = x_1 - y_1 \ ,\ a_2 = x_2 - y_2 \ ,\ b_1 = y_1 - z_1 \ ,$ $b_2 = y_2 - z_2$

$$a_1 + b_1 = x_1 - z_1 \ ,\ a_2 + b_2 = x_2 - z_2$$

$$\sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2} \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

بعد التربيع والاختصار نجد أن : $a_1 b_1 + a_2 b_2 \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2}$

وهذه تسمى متراجحة شفارتز في R

$$u = \{a_1, a_2\}\ , v = \{b_1, b_2\} \ => \ u.v = |u||v|$$

ونبرهن المتراجحة بطريقة ثانية:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 \ \le\ |a_1 b_1 + a_1 b_2| \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

بعد التربيع والاختصار نجد $2\,(a_1 b_2).(a_2 b_1) \le (a_1 b_2)^2 + (a_2 b_1)^2$

وهذه المتراجحة صحيحة حسب $2 \propto \beta \le \propto^2 + \beta^2$

إذا d مسافة على X ومنه (R^2, d) فضاء متري ويدعى الفضاء المتري الحقيقي (المألوف) في R^2

مثال (٣): ليكن $X = \mathbb{R}^n$ ونعرف التابع d بالشكل : $d: X \times X \to \mathbb{R}$ $x = (x_1, x_2, .., x_n)$

$y = (y_1, y_2, .., y_n)$

$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$ أثبت أن d تابع مسافة على X وأن (R^n, d) فضاء متري

الحل :

الشرط الأول (غير سالب): $\forall\ x,y \in X\ ; d(x,y) = \sqrt{\sum_i^n (x_i - y_i)^2} \geq 0$

الشرط الثاني:

$$\forall x,y \in X\ ; d(x,y) = 0 => \sum_i^n (x_i - y_i) = 0 => x_i - y_i = 0 => y = x$$

الشرط الثالث : $\forall x,y \in X;\ d(x,y) = \sqrt{\sum_i^n (x_i - y_i)^2} = \sqrt{\sum_i^n (y_i - x_i)^2} = d(y,x)$

الشرط الرابع (متراجحة المثلث) : $\forall\ z = (z_1, z_2, \dots, z_n)\ ;\ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2}$$

للتبسيط نفرض: $a_i = x_i - y_i \quad , \quad b_i = y_i - z_i \quad , \quad a_i + b_i = x_i + z_i$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (\,a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (\,a_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (\,b_i)^2}$$

بعد التربيع والاختصار نحصل على المتراجحة المكافئة: $\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$

وهذه تسمى متراجحة شفارتز في R^n

$$u = \{a_1, \dots, a_n\}\ , v = \{b_1, \dots, b_n\} \ => < u.v > \leq |u||v|$$

أو بطريقة ثانية :

$$\sum_{i=1}^n b_i^2 \neq 0 \qquad \text{و} \qquad \sum_{i=1}^n a_i^2 \neq 0$$

من الواضح أن $\forall \propto, \beta \in R\ ;\ \sum_{i=1}^n (\propto a_i + \beta b_i)^2 \geq 0$

وبالتربيع $\sum_{i=1}^n \left(\propto^2 a_i^2 - 2 \propto a_i \beta b_i + \beta^2 b_i^2\right) \geq 0$

$$\propto^2 \sum_{i=1}^n a_i^2 - 2 \propto \beta \sum_{i=1}^n a_i b_i + \beta^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 \geq 0$$

$$2 \propto \beta \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \propto^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \beta^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \geq 0$$

ولنأخذ : $\beta = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$, $\propto = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$

$$2\sqrt{\sum_1^n b_i^2}\sqrt{\sum_1^n a_i^2}\ (\sum_1^n a_i b_i) \leq \sum_1^n b_i^2 . \sum_1^n a_i^2 + \sum_1^n a_i^2 . \sum_1^n b_i^2$$

$$2\sqrt{\sum_1^n b_i^2}\sqrt{\sum_1^n a_i^2}\ (\sum_1^n a_i b_i) \leq 2\sum_1^n a_i^2 . \sum_1^n b_i^2$$

$$=> (\sum_1^n a_i b_i) \leq \sqrt{\sum_1^n a_i^2}\sqrt{\sum_1^n b_i^2}$$

ومنه d تابع مسافة على $X = R^n$ و (R^n, d) فضاء متري ويدعى الفضاء المتري الحقيقي (المألوف) في R^n

مثال (٤): ليكن $X = \mathbb{R}^n$ ونعرف التابع d بالشكل : $d: X \times X \to \mathbb{R}^n$

$d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$ أثبت أن d تابع مسافة على X وأن (R^n, d) فضاء متري

الحل :

الشرط الأول (غير سالب): $\forall\, x, y \in X\ ; d(x,y) = \sum_1^n |x_i - y_i| \geq 0$

الشرط الثاني $\forall x, y \in X\ ; d(x,y) = 0 => \sum_1^n |x_i - y_i| = 0 => x_i = y_i => x = y$

الشرط الثالث : $\forall x, y \in X;\ d(x,y) = \sum_1^n |x_i - y_i| = \sum_1^n |y_i - x_i| = d(y,x)$

الشرط الرابع (متراجحة المثلث) : $\forall\, z = (z_1, z_2, \dots, z_n)\ ;\ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

$$|x_i - z_i| \leq |x_i - y_i| + |y_i - z_i|$$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| \leq \sum_{i=1}^{n} (|x_i - y_i| + |y_i - z_i|) = \sum_1^n |x_i - y_i| + \sum_1^n |y_i - z_i|$$

$$= d(x,y) + d(y,z)$$

ومنه dتابع مسافة على R^n و (R^n , d) فضاء متري

مثال(٥) : ليكن $X = \mathbb{R}^n$ و لنعرف التابع d_∞ بالشكل: $d_\infty : X \times X \to \mathbb{R}^n$

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n); d_\infty(x,y) = max|x_i - y_i| : 1 \leq i \leq n$$

أثبت أن d_∞ دالة مسافة وتابع ل X و $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$فضاء متري

قبل أن نبدأ بالحل سنذكر بالقيمة العظمى max لمجموعة ما : نقول عن $M \in R$إنها قيمة عظمى للمجموعة المحدودة A إذا كانت جميع عناصر A أصغر أو يساوي M أي

$$M = max\, A \Leftrightarrow \forall x \in A ; x \leq M$$

الحل :

حتى تكون d دالة مسافة يجب أن تحقق الشروط الأربعة الواردة في تعريف دالة المسافة :

الشرط الأول :(غير سالب) $\forall x, y \in X; d_\infty(x,y) = max|x_i - y_i| \geq 0$

القيمة العظمى لمقادير غير سالبة هو مقدار غير سالب

الشرط الثاني :

$$\forall x, y \in X; d_\infty(x,y) = 0 => max|x_i - y_i| = 0 => x_i - y_i = 0 => x_i = y_i$$

الشرط الثالث :(التناظر)

$$\forall x, y \in X; d_\infty(x,y) = max|x_i - y_i| = max|-(y_i - x_i)| = max|(y_i - x_i)| = d_\infty(y,x)$$

الشرط الرابع:(متراجحة المثلث) : لتكن $z = (z_1, \dots, z_n)$

$$d_\infty(x,z) = max|x_i - z_i| = max|(x_i - y_i) + (y_i - z_i)|$$

$$|x_i - z_i| \leq |x_i - y_i| + |y_i - z_i| \leq max|x_i - y_i| + max|y_i - z_i|$$

$$= d_\infty(x,y) + d_\infty(y,z)$$

إذا d_∞ تابع مسافة ل X و $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ فضاء متري

نتيجة: يمكن تعريف أكثر من دالة مسافة على نفس المجموعة .

مثال(٦) : لتكن X مجموعة غير خالية و لنعرف عليها التابع : $d: X \times X \to \mathbb{R}$

$$\forall x, y \in X; \partial(x,y) = \begin{cases} 0 & : x = y \\ 1 & : x \neq y \end{cases}$$

أثبت أنها دالة مسافة ل X وأن (x, ∂) فضاء متري

الحل :

حتى تكون دالة مسافة يجب أن تحقق الشروط الأربعة الواردة في تعريف دالة المسافة :

الشرط الأول :(غير سالب) $\forall x, y \in X ; \begin{cases} \partial(x,y) = 0 \\ \partial(x,y) = 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \partial(x,y) \geq 0$

الشرط الثاني : $\forall x, y \in X : \partial(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

الشرط الثالث :(التناظر): $\forall x, y \in X ; \partial(x,y) = \partial(y,x)$

الشرط الرابع:(متراجحة المثلث) : علينا إثبات أن: $\forall x, y, z \in X ; \partial(x,z) \leq \partial(x,y) + \partial(y,z)$

و هنا نميز حالتين :

١- إذا كان $x = z$ فإن: $\partial(x,y) = 0$ (لأن الطرف الثاني إما أن يكون *0+0* أو *0+1* أو *1+1* و في كل الحالات تتحقق المتراجحة) المتراجحة صحيحة بغض النظر عن الطرف الأيمن

٢- إذا كان $x \neq z$ عندئذٍ: $\partial(x,y) = 1$ و بالتالي $y \neq x$
أو $\partial(y,z) = 1$ وبالتالي $(y \neq z$

من تحقق الشروط الأربعة نجد أن ∂ مسافة و(X, ∂) فضاء متري ويدعى **(الفضاء المتري المتقطع) .**

انتهت المحاضرة

إعداد: ناريمان جلو – هديل سعيد – هالة مصطفى