نظري

◀ دكتورة المادة: ملك مارديني

◀ المحاضرة: الثانية ◀ عنوان المحاضرة: حل تمارين

المحتوى العلمي :

١ـ تعريف النقطة الشاذة النظامية.

٢ـحل تمارين.

تعريف:

نسمي النقطة x_0 نقطة شاذة نظامية للمعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية وبأمثال متغيرة إذا كانت:

$\boxed{1}$ **الدالتان:**

$$P = (x - x_0)p \quad , \quad Q = (x - x_0)^2 q$$

دالتان تحليليتان عند النقطة x_0 .

$\boxed{2}$ أي يجب أن تكون x_0 صفراً من الدرجة الأولى على الأكثر بالنسبة ل p .

و x_0 صفراً من الدرجة الثانية على الأكثر بالنسبة ل q .

◀ **ملاحظة:** لبرهان فيما إذا كانت النقطة x_0 نقطة شاذة نظامية نتحقق من تحقق الشرط $\boxed{1}$ أو $\boxed{2}$.

- للتوضيح:

النقطة x_0 ← **نقطة عادية**

نقطة شاذة ← **شاذة نظامية** { $(x - x_0)p$, $(x - x_0)^2 q$ دالتان تحليليتان } .

← **شاذة غير نظامية** { فيما عدا ذلك } .

- حدد نوع النقطة (عادية- شاذة نظامية- شاذة غير نظامية) للمعادلات التفاضلية التالية:

$$\boxed{1}\; y'' + 5x^2 y' + (2x-3)y = 0$$

الحل

$$p = 5x^2 \;, \qquad q = 2x - 3$$

جميع النقاط عادية لأن p, q كثيرات حدود.

$$\boxed{2}\; y'' + \frac{1}{x-1} y' + \frac{1}{(x-1)^2} y = 0$$

الحل

$$p = \frac{1}{x-1} \;, \qquad q = \frac{1}{(x-1)^2}$$

جميع النقاط عادية باستثناء النقطة $x_0 = 1$ هي نقطة شاذة

$x_0 = 1$ هي صفراً بالنسبة ل p من الدرجة الأولى على الأكثر

$x_0 = 1$ هي صفراً بالنسبة ل q من الدرجة الثانية على الأكثر وبالتالي $x_0 = 1$ هي نقطة شاذة نظامية.

$$\boxed{3}\; y'' + \frac{x}{(x-3)^2} y' + \frac{x}{(x-2)(x+1)^2} y = 0$$

الحل

$$p = \frac{x}{(x-3)^2} \;, \qquad q = \frac{x}{(x-2)(x+1)^2}$$

جميع النقاط عادية باستثناء النقاط $x_0 = -1 \,, x_0 = 2 \,, x_0 = 3$ هي نقاط شاذة

- من أجل $x_0 = 3$ هي صفراً من الدرجة الثانية على الأكثر بالنسبة ل p

إذاً $x_0 = 3$ نقطة شاذة غير نظامية.

- من أجل $x_0 = 2$ هي صفراً من الدرجة الأولى على الأكثر ل p وصفراً من الدرجة الثانية على الأكثر لq

إذاً $x_0 = 2$ نقطة شاذة نظامية.

- من أجل $x_0 = -1$ هي صفراً من الدرجة الثالثة بالنسبة ل q وبالتالي $x_0 = -1$ نقطة شاذة غير نظامية.

◄ **ملاحظة:** نلاحظ في التمرين السابق عند النقطة $x_0 = 2$ أننا ذكرنا أنها صفراً من الدرجة الأولى على الأكثر ل p

توضيحاً لما ذكرنا:

$x_0 = 2$ هي صفراً من الدرجة صفر بالنسبة ل p لذلك إذا قلنا أنها صفرا من الدرجة الأولى على الأكثر ل p فهذا لا يعتبر خطأ وهنا لدينا الخيار في كتابة هذه الجملة أو عدم كتابتها.

والآن نكمل في تمارييننا:

$$\boxed{4}\ (x^2-3x)y'' + x^2y' + xy = 0$$

الحل

نقسم أولاً على أمثال y'' أي نقسم على $(x^2-3x) \neq 0$:

$$y'' + \frac{x^2}{x^2-3x}y' + \frac{x}{x^2-3x}y = 0$$

$$y'' + \underbrace{\frac{x}{x-3}}_{p}y' + \underbrace{\frac{1}{x-3}}_{q}y = 0$$

جميع النقاط عادية باستثناء النقطة $x_0 = 3$

من أجل $x_0 = 3$ هي صفراً من الدرجة الأولى على الأكثر بالنسبة ل p

و هي صفراً من الدرجة الثانية على الأكثر لq (وذلك بالعودة للملاحظة السابقة) إذاً $x_0 = 3$ نقطة شاذة نظامية.

$$\boxed{5}\ (x^2-1)y'' + x^2(x-1)y' + (x^2+x)y = 0$$

الحل

$$y'' + \frac{x^2(x-1)}{x^2-1}y' + \frac{x^2+x}{x^2-1}y = 0$$

$$p = \frac{x^2(x-1)}{x^2-1} = \frac{x^2(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2}{x+1}$$

$$q = \frac{x^2+x}{x^2-1} = \frac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x}{x-1}$$

في التعريف طريقتان لتحديد نوع النقطة استخدمنا طريقة **والآن سنستخدم الطريقة الأخرى:**

جميع النقاط عادية باستثناء النقاط $x_0 = 1 , x_0 = -1$

- من أجل النقطة $x_0 = 1$:

$$P = (x-x_0)p = (x-1)\frac{x^2}{x+1} \xRightarrow{x_0=1} P = 0$$

إذاً P تحليلية عند النقطة $x_0 = 1$

$$Q=(x-x_0)^2q=(x-1)^2\frac{x}{x-1}=x(x-1)\xRightarrow{x_0=1}Q=0$$

إذاً Q تحليلية عند النقطة $x_0=1$ وبالتالي تكون النقطة $x_0=3$ نقطة شاذة نظامية.

- من أجل النقطة $x_0=-1$:

$$P=(x-x_0)p=(x+1)\frac{x^2}{x+1}=x^2\xRightarrow{x_0=-1}P=1$$

إذاً P تحليلية عند $x_0=-1$

$$Q=(x-x_0)^2q=(x+1)^2\frac{x}{x-1}\xRightarrow{x_0=-1}Q=0$$

إذاً Q تحليلية عند $x_0=-1$ وبالتالي تكون $x_0=-1$ نقطة شاذة نظامية.

$$\boxed{6}\ (x+1)^2(x-2)^3y''+(x+1)y'+2y=0$$

الحل

$$y''+\frac{x+1}{(x+1)^2(x-2)^3}y'+\frac{2}{(x+1)^2(x-2)^3}y=0$$

جميع النقاط عادية باستثناء $x_0=-1$, $x_0=2$ نقاط شاذة

$$p=\frac{x+1}{(x+1)^2(x-2)^3}=\frac{1}{(x+1)(x-2)^3}\quad و\quad q=\frac{2}{(x+1)^2(x-2)^3}$$

- من أجل $x_0=-1$:

$$P=(x-x_0)p=(x+1)\frac{1}{(x+1)(x-2)^3}=\frac{1}{(x-2)^3}\xRightarrow{x_0=-1}P=-\frac{1}{27}$$

إذاً P تحليلية عند $x_0=-1$

$$Q=(x-x_0)^2q=(x+1)^2\frac{2}{(x+1)^2(x-2)^3}=\frac{2}{(x-2)^3}\xRightarrow{x_0=-1}Q=-\frac{2}{27}$$

إذاً Q تحليلية عند $x_0=-1$ وبالتالي النقطة $x_0=-1$ نقطة شاذة نظامية.

- من أجل $x_0=2$:

$$P=(x-x_0)p=(x-2)\frac{1}{(x+1)(x-2)^3}=\frac{1}{(x+1)(x-2)^2}\xRightarrow{x_0=2}P=\infty$$

إذاً P غير تحليلية عند $x_0=2$ وبالتالي تكون $x_0=2$ نقطة شاذة غير نظامية.

◀**تنويه:** إذا كانت إحدى الدالتين غير تحليلية عند نقطة ما ف ليس من الضروري التحقق من الدالة الأخرى إن كانت تحليلية أم لا.

$\boxed{7}$ $(3x-5)^5y'' + (3x-5)^4y' + (3x-5)^3y = 0$

الحل

نقسم على أمثال y'' :

$$y'' + \frac{1}{3x-5}y' + \frac{1}{(3x-5)^2}y = 0$$

جميع النقاط عادية باستثناء $x_0 = \frac{5}{3}$:

$$P = (x-x_0)p = \underbrace{\left(x-\frac{5}{3}\right)}_{\text{نضرب ونقسم على 3}}\frac{1}{3x-5} = \frac{1}{3}(3x-5)\frac{1}{3x-5} = \frac{1}{3}$$

إذاً P تحليلية عند $x_0 = \frac{5}{3}$.

$$Q = (x-x_0)^2q = \underbrace{\left(x-\frac{5}{3}\right)^2}_{\text{نضرب ونقسم على 3 ولاننسى التربيع}}\frac{1}{(3x-5)^2} = \frac{1}{9}\frac{(3x-5)^2}{(3x-5)^2} = \frac{1}{9}$$

إذاً Q تحليلية عند $x_0 = \frac{5}{3}$ وبالتالي $x_0 = \frac{5}{3}$ نقطة شاذة نظامية .

$\boxed{8}$ $(2x^2-4x)y'' + x(2x^2-4x)y' + (2x^2-4x)y = 0$

الحل

نقسم على أمثال y'' : $y'' + xy' + y = 0$

جميع النقاط عادية.

$\boxed{9}$ $(2x^2-4x)^3y'' + x(2x^2-4x)y' + (2x^2-4x)y = 0$

الحل

نقسم على أمثال y'':

$$y'' + \frac{x}{(2x^2-4x)^2}y' + \frac{1}{(2x^2-4x)^2}y = 0$$

$$p = \frac{x}{(2x^2-4x)^2} \quad , \qquad q = \frac{1}{(2x^2-4x)^2}$$

جميع النقاط عادية باستثناء $x_0 = 2$, $x_0 = 0$ هي نقاط شاذة.

- من أجل $x_0 = 0$:

$$P = (x-x_0)p = x\underbrace{\frac{x}{(2x^2-4x)^2}}_{\text{نخرج عامل مشترك } x \text{ ولاننسى التربيع}} = \frac{x^2}{x^2(2x-4)^2} = \frac{1}{(2x-4)^2} \xRightarrow{x_0=0} P = \frac{1}{16}$$

إذاً P تحليلية عند $x_0 = 0$.

$$Q = (x-x_0)^2 q = x^2\underbrace{\frac{1}{(2x^2-4x)^2}}_{\text{نخرج عامل مشترك } x \text{ ولاننسى التربيع}} = \frac{x^2}{x^2(2x-4)^2} = \frac{1}{(2x-4)^2} \xRightarrow{x_0=0} Q = \frac{1}{16}$$

إذاً Q تحليلية عند $x_0 = 0$ وبالتالي $x_0 = 0$ هي نقطة شاذة نظامية.

- من أجل $x_0 = 2$:

$$P = (x-x_0)p = (x-2)\underbrace{\frac{x}{(2x^2-4x)^2}}_{\text{نخرج عامل مشترك } 2x \text{ ولاننسى التربيع}} = \frac{x(x-2)}{4x^2(x-2)^2} = \frac{1}{4x(x-2)} \xRightarrow{x_0=2} P = \infty$$

إذاً P غير تحليلية عند $x_0 = 2$ وبالتالي هي نقطة شاذة غير نظامية.

اعتق ذاتك من عبودية الانتظار..

انتهت المحاضرة

إعداد: بسمة نصرالله وعلا الدالاتي ودعاء الرحيل