نظري

◄ دكتور المادة: غصون الجيرودي

◄المحاضرة : الثانية   عنوان المحاضرة : التراتيب والتوافيق

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي في المحاضرة الثانية من مقررنا الرياضيات المتقطعة

سنتناول في هذه المحاضرة عدة مفاهيم (التراتيب – التوافيق – مطابقة باسكال –مطابقة فاندرموند – مفكوك نيوتن– تجزئة مجموعة إلى أجزاء منفصلة مثنى مثنى) بالإضافة إلى تمارين وأمثلة .

التراتيب :

تعريف: التراتيب هي عدد طرق ترتيب n شيئاً مختلفاً في r مكان و يرمز لها بالرمز p_r^n حيث يعطى

بالعلاقة : $p_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$

مثال : بكم طريقة يمكن أن نسحب 3 أوراق على التتالي(مع تسجيل النتائج)من مجموعة ورق اللعب في الحالتين:

1– السحب مع الإعادة : بفرض Aمجموعة أوراق اللعب عندها:

$$52^3 = |A| \times |A| \times |A| \xLeftarrow{\text{عدد الطرق}} |A| = 52$$

2-السحب دون إعادة: $p_3^{52} = \frac{52!}{(52-3)!}$

عدد أوراق اللعب هي 52 ورقة
((بلا جواكر :p))

التوافيق :

تعريف : في كثير من الأحيان لا نقيم اعتبار لترتيب العناصر، فإذا كان لدينا مجموعة عدد عناصرها n

وأردنا مجموعة جزئية منها مجموع عناصرها r فنقول عن هذا أنه توافق حجمه r مأخوذ من A

ونرمز له بـ $c_r^n = \binom{n}{r}$ حيث : $c_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

مثال : بكم طريقة يمكن توزيع 13أورقة على لاعب من مجموعة أوراق اللعب (هنا لا يهم ترتيب الأوراق في يد اللاعب لذلك سنستخدم التوافيق): $\binom{52}{13} = \frac{52!}{13!(52-13)!} = 635 \times 10^9$

ملاحظات :

- $p_0^n = 1 \quad , \qquad 1! = 1 \quad , \qquad 0! = 1$
- $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 0$
- $\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n$
- $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

مطابقة باسكال :نفرض n, kعددان صحيحان موجبان وكان $k < n$ فإن

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

مطابقة فاندرمون :نفرض n, m, kأعداد طبيعية حيث $k < n, m$ حيث :

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{r-k}\binom{n}{k}$$

مفكوك نيوتن :من أجل أي عددين حقيقين A, B فإن :

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$$

عندما $n = 2$

$$(A+B)^2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} A^{2-k} B^k = A^2 + 2AB + B^2$$

تمارين :

1- برهن أن

$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = 3^n$ حيث $n > 0:$

الحل : بوضع $A = 1, B = 2$ في مفكوك نيوتن

$$(1+2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1)^{n-k} 2^k \Longrightarrow 3^n = \sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k}$$

2-برهن أن

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \ldots + \begin{cases} \binom{n}{n} \text{ إذا كان } n \text{ زوجي} \\ \binom{n}{n-1} \text{ إذا كان } n \text{ فردي} \end{cases} = 2^{n-1}$$

الحل :لنبرهن أولا أن $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$

بوضع $A = 1, B = 1$ في مفكوك نيوتن

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} \ldots\ldots (1)$$

لنبرهن ثانيا أن :

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

بوضع $A = 1, B = -1$ **في مفكوك نيوتن**

$$(1+(-1))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} (-1)^k$$

$$0 = \binom{n}{0} 1^n (-1)^0 + \binom{n}{1} 1^{n-1} (-1)^1 + \binom{n}{2} 1^{n-2} (-1)^2 + \ldots + \binom{n}{n} 1^0 (-1)^n$$

$$0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} \ldots . (2)$$

بجمع (1) و (2) :

$$2^n = 2^n + 0 = 2\binom{n}{0} + 2\binom{n}{2} + \ldots + \begin{cases} 2\binom{n}{n} \text{ اذا كان n زوجي} \\ 2\binom{n}{n-1} \text{ اذا كان } n \text{ فردي} \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{بالتقسيم على 2}]{} 2^{n-1} = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \ldots + \begin{cases} \binom{n}{n} \text{ اذا كان n زوجي} \\ \binom{n}{n-1} \text{ اذا كان } n \text{ فردي} \end{cases}$$

3-ماهو معامل الحد (أمثال الحد) $x^{12}\,y^{13}$ في المفكوك $(2x-3y)^{25}$

مفكوك نيوتن :

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k}\,B^k$$

بوضع $n = 25, B = -3y, A = 2x$

$$(2x + (-3y))^{25} = \sum_{k=0}^{25} \binom{25}{k} (2x)^{25-k}(-3y)^k$$

في الحد الموافق لـ $k = 13$ يكون $\binom{52}{13}(2x)^{25-13}(-3y)^{13} = \binom{25}{13}(2)^{12}(-3)^{13}x^{12}y^{13}$

فيكون أمثال الحد $x^{12}y^{13}$ هو $\boxed{\binom{25}{13}(2)^{12}(-3)^{13}}$

4- برهن أن : $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$

بأخذ : $m = n, r = n$ في مطابقة فاندرموند

$$\xrightarrow[\text{في قانون فاندرمون}]{}\binom{n+n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}\binom{n}{k}$$

بما أن $\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}$

$$\xRightarrow[\text{ومنه}]{}\binom{2n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$$

تجزئة مجموعة إلى أجزاء منفصلة مثنى مثنى:

لنفرض أن A مجموعة عدد عناصرها r وإن $r_1,r_2,\dots,r_n$ أعداد طبيعية تحقق أن

$r_1+r_2+..+r_n=r$ فيمكن تجزئة A إلى n مجموعة $A_1,A_2,..,A_n$ بحيث $|A_i|=r_i$ تحقق

التجزئة : $(A=\cup_{i=1}^{n}A_i \quad i\neq j \quad A_i\cap A_j=\emptyset)$ **وعليه عدد طرق اختيار الأجزاء يساوي :**

$$\binom{r}{r_1,r_2,..,r_n}=\frac{r!}{r_1!\,r_2!\dots.r_n!}$$

مثال: نختار من مجموعة تحوي 10 عناصر ثلاث مجموعات بحيث كل مجموعة تحوي 3,2,5 عنصراً

$$\binom{10}{3}\binom{7}{2}\binom{5}{5}=\frac{10!}{3!\,7!}\frac{7!}{2!\,5!}\frac{5!}{0!\,5!}$$

((لاحظ أن المجموع 10=5+2+3 و أنه في كل مرة ينقص العدد الكلي بمقدار عدد المجموعة الجزئية التي تم حساب توافيقها من قبل

ففي أول توافق كان $n=10$ و $r=3$ و في التوافق الثاني أصبح $n=10-3=7$ و $r=2$

و في التوافق الأخير $n=7-2=5$ و $r=5$))

$$\xrightarrow[\text{هذا يكافئ}]{}\binom{10}{3,2,5}=\frac{10!}{2!\,3!\,5!}$$

تمرين : بكم طريقة يمكن توزيع سبع جوائز على ثلاث أطفال أذا كنا نريد أن نعطي الطفل الأول 3جوائز والطفلين الأخرين جائزتين :

الحل: $\binom{7}{3,2,2}=\frac{7!}{3!2!2!}$

تمرين :ماعدد الكلمات المختلفة الناتجة عن متبادلات الاحرف الموجودة في كلمة $statistical$

الحل : عدد الاحرف الكلي 11 و عدد مرات تكرار حرف s هي 3 ,عدد مرات تكرار حرف a وهي 2، عدد مرات تكرار حرف t هي 3 , عدد مرات تكرار حرف $l=1$, عدد مرات تكرار حرف $c=1$, عدد مرات تكرار حرف $i=2$:

$$\binom{11}{2,3,2,2,1,1} = \frac{11!}{3!\,2!\,2!\,2!} = 831600$$

تمرين :بكم طريقة يمكن توزيع أوراق اللعب على 4 لاعبين بالتساوي

الحل :

$$\binom{52}{13,13,13,13} = \frac{52!}{(13!)^4}$$

انتهت المحاضرة

مثلث باسكال

إعداد : سماح علوان * سندس درويش * نذير تيناوي