نظري

◄ دكتور المادة: هدى شماط

◄المحاضرة: الثانية عنوان المحاضرة : الفضاءات

سنتناول في هذا المحاضرة ما يلي التالية :

١ ـ الفضاء المنتظم

٢ ـ الجداء الداخلي/ ومبرهنات

◄**تعريف الفضاء النظيم :** رمزه $\|.\|$

وهو عبارة عن دالة حقيقية منطلقها الفضاء المتجهي بالشكل $\|.\|: V \longrightarrow \mathbb{R}$

كل عنصر من المنطلق صورته تكتب بالشكل $x \longrightarrow \|x\|$ **وتحقق الشروط الأتية :**

$$1)\ \forall x \in V: \|x\| \geq 0$$
$$2)\ \forall x \in V: \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_V$$
$$3)\ \forall x \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R} : \|\alpha x\| = |\alpha|.\|x\|$$
$$4)\ \forall x, y \in V : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$ وتدعى مترجحة المثلث

وإذا تحققت الشروط السابقة عندئذ نقول عن $(V, \|.\|)$ فضاء منظم

مثال : ليكن $\mathbb{R}^n$ **فضاء متجهي ولنعرف عليه الدالة التالية:**

$$\forall x \in \mathbb{R}^n; \|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

برهن أن $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ **فضاء منظم.** حيث $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

الحل:

سنعتبر دوماً أن الفضاء $\mathbb{R}^n$ **فضاء متجهي ولا داعي لاثبات ذلك.. لكن يجب أن نثبت أن الدالة** $\|.\|$ **هي دالة نظيم (من خلال تحقق الشروط :**

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$1)\ |x_i| \geq 0, i = 1,2, \dots n \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i| \geq 0 \Leftrightarrow \|x\| \geq 0$$

(بما أن القيمة المطلقة لكل مركبات العنصر x **أي الأعداد** $|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|$ **هي غير سالبة فإن مجموعها حتماً سيكون غير سالب)**

$$2)\ \|x\| = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i| = 0 \Leftrightarrow |x_1| + |x_2| + \ldots\ldots + |x_n| = 0$$

(مجموع مقادير موجبة يساوي الصفر إذاً كل من هذه المقادير يساوي الصفر)

$$\Leftrightarrow |x_i| = 0\ ,(i = 1,2,3,\ldots\ldots,n) \Leftrightarrow x_i = 0,(i = 1,2,3,\ldots\ldots,n)$$
$$\Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots\ldots x_n = 0 \Leftrightarrow x = (0,0,\ldots\ldots,0) = 0_{\mathbb{R}^n}$$

$$3)\|\alpha x\| = \sum_{i=1}^{n} |\alpha x_i| = \sum_{i=1}^{n} |\alpha| . |x_i| = |\alpha| \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |\alpha| . \|x\|$$

$$4)\|x + y\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \le \sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|) = \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i|$$

نستنتج $\Leftarrow \|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$

حقّق الشروط الأربعة إذاً $\|.\|$ دالة نظيم، **ومنه** $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ **فضاء منظم.**

◀ **ملاحظة :** يمكن أن نعرف على نفس الفضاء أكثر من دالة نظيم .

مثال ٢ : ليكن الفضاء المتجهي $\mathbb{R}^n$ ولنعرف عليه الدالة التالية:

$$\|x\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2}$$

برهن أن $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ **دالة نظيم على** $\mathbb{R}^n$

الحل :

لنثبت أن الدالة المعرفة على الفضاء الشعاعي السابق هي دالة نظيم :

١) $\forall\ x \in R^n : x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

و بالتالي $x_i^2 \ge 0$ و عليه يكون $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \ge 0$ لأن مجموع أعداد موجبة هو موجب ، الآن بالجذر نجد أن :

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \ge 0$$

٢) $\forall x \in R^n ; \left|\left|x\right|\right| = 0 \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{نربع}} \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 = 0$

و هذا يعني أن $x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2 = 0$ و لكن مجموع أعداد موجبة يكون معدوماً إذا كان كل من هذه الأعداد معدوم أي $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots . x_n = 0$ و بالتالي $x = 0_{R^n}$

٣) $\forall x \in R^n , \alpha \in R : \left|\left|\alpha x\right|\right| = \left(\sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha^2 (x_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} = |\alpha| \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} = |\alpha|\ \left|\left|x\right|\right|$

٤) **لنثبت أنه أياً كانت** $x, y \in R^n$ **فإن :**

$$\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$$

$$\|\varkappa+y\|=\left(\sum_{i=1}^{n}(\varkappa_i+y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \|\varkappa+y\|^2=\sum_{i=1}^{n}(\varkappa_i+y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(\varkappa_i^2+2\varkappa_i y_i+y_i^2)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\varkappa_i^2+2\sum_{i=1}^{n}\varkappa_i y_i+\sum_{i=1}^{n}y_i^2=\|\varkappa\|^2+2\sum_{i=1}^{n}\varkappa_i y_i+\|y\|^2$$

نريد برهان هذه العلاقة :

فكرة الانطلاق

$$2\sum_{i=1}^{n}\varkappa_i y_i \leq 2\|\varkappa\|,\|y\|$$

نأخذ متحولاً اختيارياً X عندئذٍ يكون :

$$0\leq\sum_{i+1}^{n}(\varkappa_i X+y_i)^2=\sum_{i+1}^{n}(\varkappa_i^2X^2+2\varkappa_i y_i X+y_i^2)$$

$$\Rightarrow 0\leq\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)}_{a}X^2+\underbrace{\left(2\sum_{i=1}^{n}x_i y_i\right)}_{b}X+\underbrace{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}_{c}$$

وهي معادلة من الدرجة الثانية لـ X وهي موجبة دوماً و هذا يتحقق عندما يكون مميزها سالب

$$\Delta=b^2-4.a.c<0$$

$$\Delta=4\left(\sum_{i=1}^{n}x_i y_i\right)^2-4\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)<0$$

بتقسيم الطرفين على 4 و العزل نجد أن :

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i y_i\right)^2<\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)$$

بجذر الطرفين غير السالبين نجد أن :

$$\Rightarrow\sum_{i+1}^{n}x_i y_i<\|x\|.\|y\|\ \dots\dots..(*)$$

بالعودة إلى برهان الشرط الرابع .. كنا قد وصلنا إلى

$$\Rightarrow\|x+y\|^2=\|x\|^2+2\sum_{i+1}^{n}x_i y_i+\|y\|^2$$

$$\underset{(*)}{<} \|x\|^2 + 2\|x\|\ \|y\| + \|y\|^2$$

$$< (\|x\| + \|y\|)^2$$

نجذر الطرفين

$$\Longrightarrow \|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$$

مثال ٢ : يوجد لدينا ℓ^∞ مجموعة المتتاليات الحقيقية المحدودة

$$x \in \ell^\infty , \exists C_x \in \mathbb{R} , \forall i \in N^* , |x| < C_x$$

ولنعرف على ℓ^∞ الدالة التالية: $x \in \ell^\infty\ \|x\| = spu|x_i|_{i\in N^*}$

برهن أن $(\ell^\infty , \|.\|)$ تشكل فضاء متجهي.

الحل :

$$\forall x, y \in \ell^\infty, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$1) |x_i| \ge 0 \ \ ; i \in N^* \Longrightarrow spu|x_i|_{i\in N^*} \ge 0 \Leftrightarrow \|x\| \ge 0$$

$$2) \|x\| = 0 \Leftrightarrow spu|x_i|_{i\in N^*} = 0 \quad \Leftrightarrow |x_i| = 0 \ ; i \in N^*$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 0 , x_2 = 0, \dots \dots \dots , x_n = 0 \Leftrightarrow x = 0_{l^\infty}$$

$$3) \|\alpha x\| = spu|\alpha x_i|_{i\in N^*} = spu_{i\in N^*}|\alpha| . |x_i| = |\alpha| spu|x_i|_{i\in N^*} = |\alpha| . \|x\|$$

لنبرهن أن $4) \|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$

أصغر حد أعلى $\|x+y\| = spu_{i\in N^*}|x_i + y_i|$

لكن $|x_i + y_i| \le |x_i| + |y_i| \le spu|x_i|_{i\in N^*} + spu|y_i|_{i\in N^*}$

أي أن $spu|x_i|_{i\in N^*} + spu|y_i|_{i\in N^*}$ هو حد أعلى لِـ $|x_i + y_i|$ ولكن $spu_{i\in N^*}|x_i + y_i|$ هو أصغر حد أعلى

وبالتالي:

$$spu_{i\in N^*}|x_i + y_i| \le spu|x_i|_{i\in N^*} + spu|y_i|_{i\in N^*} \Longrightarrow \|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$$

◄ملاحظة : تعريف الحد الأعلى : نقول عن A أنها محدودة من الأعلى من أجل أي عنصر بالشكل

$$\forall x \in A ; \exists a \in R , x < a$$

تمرين (وظيفة) : ليكن $c[a,b]$ فضاء الدوال الحقيقية المستمرة على المجال $[a,b]$ ولنعرف الدالتين

$$\|x\|_1 = max|x(t)| : t \in \ [a, b]$$

$$\|x\|_2 = \int_a^b x(t)\,dt$$

برهن أن $(c[a,b],\|.\|_1)$ تشكل فضاء منظم وأن $(c[a,b],\|.\|_2)$ تشكل فضاء منظم

سنورد الحل في المحاضرة القادمة ^^

◄الفضاء الداخلي: نرمز له ب $\langle \underset{\text{مركبة}}{\text{ش}} \;,\; \underset{\text{مركبة}}{\text{ش}} \rangle$

ليكن V فضاء متجهي، نعرّف عليه الدالة بالشكل :

$$\langle .,. \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto < x,y >$$

(عناصر المنطلق هي ثنائيات (x,y) وكل من x,y هو شعاع (عنصر) من الفضاء V)

وبحيث تحقق الشروط التالية:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x,y,z \in V$$
$$1)\ < x,x > \geq 0$$
$$2)\ < x,x > = 0 \Leftrightarrow x = 0_V$$
$$3)\ < x,y > = < y,x >$$
$$4)\ < \alpha x, y > = \alpha < x,y > = < x, \alpha y >$$
$$5)\ < x+y, z > = < x,z > + < y,z >$$

هنا نثبت z و نأخذها مع y و x

$$< x, y+z > = < x,y > + < x,z >$$

هنا نثبت x و نأخذها مع y و z .

عندئذٍ ندعو $(V,<,>)$ بفضاء الجداء الداخلي

◄ملاحظة : يمكن أن نعرف أكثر من جداء داخلي على فضاء متجهي.

مثال: لنعرّف على $\mathbb{R}^n$ الدالة التالية .

$$<,> : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longrightarrow < x,y > = \sum_{i=1}^{n} x_i . y_i$$

برهن أن هذه الدالة هي دالة جداء داخلي.

الحل:

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x,y,z \in \mathbb{R}^n$:

$$1) < x,x > = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$$

$$2) < x,x > = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + \ldots \ldots \ldots + x_n^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x_i^2 = 0 \quad , i = 1,2,3 \ldots \ldots \ldots , n$$
$$\Leftrightarrow x_i = 0 \quad , i = 1,2,3 \ldots \ldots \ldots , n$$
$$\Leftrightarrow (x_1, x_2, \ldots \ldots \ldots, x_n) = (0,0,0, \ldots \ldots ,0) = 0_{\mathbb{R}^n}$$

$$3) < x,y > = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i\, x_i = < y,x >$$

$$4) < \alpha x, y > = \sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i) y_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha (x_i y_i) = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \alpha < x,y >$$

$$< x, \alpha y > = \sum_{i=1}^{n} x_i (\alpha y_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha x_i y_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \alpha < x,y >$$

$$5) < x+z, y > = \sum_{i=1}^{n} (x_i + z_i) y_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i y_i + z_i y_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} z_i y_i = < x,y > + < z,y >$$

بنفس الطريقة نبرهن أن $< x, y+z > = < x,y > + < x,z >$ أي:

$$< x, y+z > = \sum_{i=1}^{n} x_i (y_i + z_i) = \sum_{i=1}^{n} (x_i y_i + x_i z_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} x_i z_i = < x,y > + < x,z >$$

ومنه نجد أن $(\mathbb{R}^n, < , >)$ **فضاء جداء داخلي**

◄مبرهنة (متراجحة كوشي – شفارتز): ليكن V فضاءً شعاعياً و $x,y \in V$ عندئذٍ:

$$< x,y >^2 \leq < x,x > < y,y >$$

البرهان :

لنميز حالتين :

الحالة الأولى : لنفرض أن $x = 0_V$

$$< x.y > = < 0_V, y > = < 0_R.\mathrm{x}, \mathrm{y} > = 0_R < x.y > = 0_R$$

من جهة أخرى

$$< x, x > = < 0_v.0_v > = < 0_R.x, 0_R.x > = (0_R)^2$$

و بالتالي :

$$0_R = < x, y > \leq < x, x > < y, y > = 0_R$$

الحالة الثانية: إذا كانت $x \neq 0_V$ فإنه من أجل أي عدد حقيقي $\propto$

$$0 \leq <\propto x - y, \propto x - y> = <\propto x, \propto x> + <\propto x, -y> + < -y, \alpha x > + < -y, -y >$$

$$0 \leq \propto^2 < x, x > - \propto < x, y > - \propto < y, x > + < y, y >$$

$$0 \leq \propto^2 < x, x > -2 < x, y > \propto + < y, y >$$

لنأخذ $\propto = \frac{<x,y>}{<x,x>}$ حيث $x \neq 0_V$

$$0 \leq \frac{<x,y>^2}{<x,x>^2} < x, x > -2 \frac{<x,y>^2}{<x,x>} + < y, y >$$

$$0 \leq \frac{<x,y>^2}{<x,x>} - 2 \frac{<x,y>^2}{<x,x>} + < y, y >$$

نختزل ثم نضرب بالمقام المشترك طرفي المتراجحة :

$$0 \leq - \frac{<x,y>^2}{<x,x>} + < y, y >$$

$$< x, y >^2 \leq < x, x > . < y, y >$$

فالمتراجحة محققة

نتيجة : الشرط اللازم والكافي كي تنقلب المتراجحة إلى مساواة هو إما $x = 0_V$ أو $y = \propto x$ أي أن x و y مرتبطان خطياً

◄**مبرهنة :** **تربط الفضاءات المنظمة بفضاءات الجداء الداخلي :**

إذا كان V فضاء جداء داخلي ولتكن الدالة $\|.\|: V \to R$

$$x \to \|x\| = \sqrt{< x, x >}$$

تحدد نظيماً على V

الإثبات :

نختبر شروط النظيم :

$$1)\forall x \in V, \quad \|x\| = \sqrt{< x, x >} \geq 0$$

$$2)\forall x \in V, \|x\| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{< x, x >} = 0 \Leftrightarrow < x, x > = 0 \Leftrightarrow x = 0_V$$

$$3)\forall x \in V, \forall \propto \in R, \|\alpha x\| = \sqrt{< \alpha x, \alpha x >} = \sqrt{\alpha^2 < x, x >} = |\alpha|\sqrt{< x, x >} = |\alpha|. \|x\|$$

$$4)\forall x \in V, \|x + y\| = \sqrt{< x + y, x + y >} \Rightarrow \|x + y\|^2 = < x + y, x + y >$$
$$= < x, x > +2 < x, y > + < y, y >$$
$$= \|x\|^2 + 2 < x, y > + \|y\|^2$$
$$\leq \|x\|^2 + 2\sqrt{< x, x >}\sqrt{< y, y >} + \|y\|^2$$

حسب متراجحة كوشي – شفارتز التي أثبتناها في بداية المتراجحة

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|^2)^2$$

$\Rightarrow \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ و هو المطلوب

◄ **ملاحظة :** تدل المبرهنة السابقة على أن كل فضاء جداء داخلي هو فضاء منظم ولكن العكس ليس بالضرورة أن يكون صحيحاً أي ليس كل فضاء منظم هو فضاء جداء داخلي

إلا إذا تحققت المساواة (مساواة متوازي الأضلاع) التي سنتناولها في المحاضرة القادمة ^^

انتهت المحاضرة

إعداد: كمال الرفاعي_محمد أنس القزاز_سارة شهاب