◄ دكتور المادة: علي قبوي

◄ المحاضرة: الثالثة

عنوان المحاضرة: حل تمارين+مبرهنات

بسم الله الرحمن الرحيم

أهلا بكم أصدقائي .. سنقوم في هذه المحاضرة بحل بعض التمارين وسنتعرف على بعض المبرهنات ..

تمرين (١):

تنتج إحدى شركات الأدوية لقاحاً لمعالجة السعال فإذا فرضنا أن نسبة اللقاحات الفاسدة في الإنتاج معروفة سلفاً لنا بأنها (0.05) فإن نسبة اللقاحات الجيدة هي (0.95) ،فإذا اخترنا (15) لقاحاً من الإنتاج بطريقة عشوائية ،**فما احتمال** :

١- أن يكون ثلاثة لقاحات فاسدة .

٢- أن يكون على الأكثر ثلاثة لقاحات فاسدة .

٣- احسب القيمة المتوقعة والانحراف المعياري لاختيار اللقاح الفاسد .

الحل:

التجربة برنولية ثنائية لها نتيجتان لقاح فاسد أو جيد تكرار لهذه التجربة $(n = 15)$ مرة ، فتصبح التجزئة حدانية بوسيطين $(n = 15)$ و $(P = 0.05)$ احتمال النجاح "اختيار لقاح فاسد"
فيدل المتغير العشوائي (X) على عدد اللقاحات الفاسدة من (15) لقاحاً فيكون التوزيع الحداني أي أن :

$$X \sim b(n = 15, P = 0.05) \Leftrightarrow f_X(x) = \binom{n}{x} P^x . q^{n-x} \quad ; x = 0,1, \dots, n$$

$$f_X(x) = \binom{15}{x} (0.05)^x . (0.95)^{15-x} \quad ; x = 0,1, \dots ,15$$

١- احتمال أن يكون ثلاثة لقاحات فاسدة

$$P(X = 3) = f_X(3)$$

$$\Rightarrow f_X(3) = \binom{15}{3} (0.05)^3 . (0.95)^{12} \approx 0.031$$

٢- احتمال أن يكون على الأكثر ثلاثة لقاحات فاسدة

$$P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

$$\Rightarrow P(X \leq 3)$$
$$= \binom{15}{0}(0.05)^0.(0.95)^{15} + \binom{15}{1}(0.05)^1.(0.95)^{14}$$
$$+ \binom{15}{2}(0.05)^2.(0.95)^{13} + \binom{15}{3}(0.05)^3.(0.95)^{12}$$
$$\Rightarrow (X \leq 3) = 0.463 + 0.366 + 0.135 + 0.031 = 0.995$$

٣- القيمة المتوقعة :

$$\boxed{E(X) = n.P = (15)(0.05) = 0.75}$$

التباين :

$$V(X) = n.P.q = (15)(0.05)(0.95) \quad ; q = 1 - P$$
$$\boxed{\Rightarrow V(X) = 0.7125}$$

الانحراف المعياري :

$$\boxed{\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.7125} \approx 0.84}$$

تمرين (٢) :

يجري تفتيش الشحنات الكبيرة من البضاعة القادمة إلى مؤسسة صناعية بطريقة العينة ، لنفترض أن هذه الطريقة تتلخص في اختيار (15) قطعة عشوائياً تم اختيارها الواحدة تلو الأخرى وترفض البضاعة إذا لاحظنا قطعتين مرفوضتين أو أكثر إذا احتوت بضاعة على (0.05) من القطع المرفوضة فما هو

احتمال : ١- قبول البضاعة

٢- رفض البضاعة

الحل:

إذا دل (X) على عدد القطع المرفوضة فما هو توزيع هذا المتغير :

إن ل (X) التوزيع الحداني بوسيطين $(n = 15)$ و $(P = 0.05)$ و هو احتمال النجاح "اختيار قطعة مرفوضة" ، فتكون ل (X) دالة الكثافة الاحتمالية التالية :

$$f_X(x) = \binom{n}{x} P^x.q^{n-x} \quad ; x = 0,1,\dots,n$$
$$\Rightarrow f_X(x) = \binom{15}{x}(0.05)^x.(0.95)^{15-x} \quad ; x = 0,1,\dots,15$$

١- احتمال قبول البضاعة :

$$P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1)$$

$$\Rightarrow P(X \leq 1) = \binom{15}{0}(0.05)^0.(0.95)^{15} + \binom{15}{1}(0.05)^1.(0.95)^{14}$$

$$\Rightarrow P(X \leq 1) = 0.829$$

٢- احتمال رفض البضاعة :

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1)$$

$$\Rightarrow P(X > 1) = 1 - 0.829 = 0.171$$

مبرهنة " تقبل دون برهان "

إذا كانت $X_1, X_2, \dots \dots, X_N$ مجموعة متغيرات عشوائية مستقلة ولكل منها التوزيع الحداني بوسيطين (n_i, P) حيث $(i = 1,2, \dots., N)$ عندئذ يكون للمتغير $Y := \sum_{i=1}^{N} X_i$ التوزيع الحداني بوسيطين $(\sum_{i=1}^{N} n_i)$ و (P) أي :

$$Y \sim b\left(\sum_{i=1}^{N} n_i \,, P\right)$$

حالة خاصة للمبرهنة :

إذا كانت المتغيرات لها نفس التوزيع الحداني ونفس الوسطاء

$$X_i \sim b(n, P) \quad ; i = 1,2, \dots., N$$

فإن :

$$Y \sim b(N.n \,, P)$$

حيث : N عدد المتغيرات (عدد عناصر العينة)

و n وسيط التوزيع الحداني .

مبرهنة " تقبل دون برهان "

إذا كان (X) متغيرا عشوائيا حدانيا وسيطاه (n) و (P) فإن القيمة الأكثر احتمالا من بين قيمه هي العدد الصحيح الواقع **داخل المجال** :

$$[n.P - q, n.P + p] = [nP - q, (n+1)P]$$

حيث : $\left(n.P = E(X)\right)$ التوقع أو المتوسط للقيم .
وطول المجال يساوي الواحد .

تمرين :

احتمال كشف جهاز رادار لطائرة معادية هو (0.9) ،إذا كان لدينا خمسة أجهزة رادار تعمل مستقلة عن بعضها **والمطلوب** :

١- إذا دل (X) على عدد الأجهزة التي يظهر على شاشاتها طائرة معادية (هدف) فما هو توزيع هذا المتغير .

٢- احسب احتمال ظهور طائرة معادية على أربع شاشات منها .

٣- احسب احتمال اكتشاف طائرة معادية في سمائنا .

٤- أوجد القيمة الأكثر احتمالا لعدد أجهزة الرادار التي ستكتشف الهدف ثم احسب الاحتمال عند هذه القيمة .

الحل:

١- تجربة ثنائية (النجاح هو اكتشف الهدف ،الفشل عدم اكتشاف الهدف) ومكررة على خمسة أجهزة فيكون ل (X) التوزيع الحداني بوسيطين $(n = 5)$ و $(P = 0.9)$ وبالتالي تكون دالة الكثافة (الاحتمال) ل (X) :

$$f_X(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} P^x . q^{n-x} \; ; \quad x = 0,1,\dots,n$$

$$\Rightarrow f_X(x) = \binom{5}{x} (0.9)^x . (0.1)^{5-x} \; ; \quad x = 0,1,2,3,4,5$$

٢- احتمال ظهور طائرة معادية على أربع شاشات منها

$$P(X = 4) = \binom{5}{4} (0.9)^4 . (0.1)^1 \approx 0.33 \quad ; q = 1 - P$$

٣- احتمال اكتشاف طائرة معادية في سمائنا

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1)$$
$$\Rightarrow P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$$
$$\Rightarrow P(X \geq 1) = 1 - \binom{5}{0} (0.9)^0 . (0.1)^5$$
$$\Rightarrow P(X \geq 1) = 1 - 0.00001 = 0.9999$$

٤- مجال القيمة الأكثر احتمالا هو $[nP-q, nP+P]$ ،وبالتالي نجد :

$$nP-q=(5)(0.9)-(0.1)=4.4$$
$$nP+P=(5)(0.9)+(0.9)=5.4$$

وبالتالي يكون المجال المطلوب هو : $[4.4,5.4]$

والقيمة الأكثر احتمالا هي (5) **"العدد الصحيح الموجود ضمن المجال"**

والاحتمال المطلوب هو :

$$P(X=5)=\binom{5}{5}(0.9)^5.(0.1)^0=0.59$$

تمرين :

كم مرة يجب إلقاء قطعة نقود غير متزنة ،احتمال ظهور الصورة (0.4) حتى نحصل على صورة باحتمال أكبر من (0.9) .

الحل:

إذا رمزنا ب (X) للمتغير العشوائي الدال على عدد مرات ظهور الصورة فإن (X) التوزيع الحداني بوسيطين $(P=0.4)$ و $(n=?)$

فتكون دالة الاحتمال ل (X) :

$$f_X(x)=P(X=x)=\binom{n}{x}P^x.q^{n-x}\ ;\ \ x=0,1,\dots,n$$
$$f_X(x)=\binom{n}{x}(0.4)^x.(0.6)^{n-x}\ \ ;x=0,1,\dots n\ \ ,q=1-P$$

والمطلوب هو تحديد قيمة (n) التي يكون عندها :

$$P(X\geq 1)>0.9$$
$$1-P(X<1)>0.9$$
$$1-P(X=0)>0.9$$
$$P(X=0)<0.1$$

بالتعويض بالعلاقة نجد :

$$\binom{n}{0}(0.4)^0.(0.6)^n<0.1$$
$$(1)(1)(0.6)^n<0.1$$

بأخذ لوغارتيم الطرفين نجد :

$$n.\ln(0.6)<\ln(0.1)$$

$$n > \frac{\ln(0.1)}{\ln(0.6)} \cong 4.6$$
$$\Rightarrow n \geq 5$$

أي يجب التكرار خمس مرات على الأقل .

تذكرة:
اللوغارتيم في المجال $]0,1[$
يكون سالبا ،وعند التقسيم على
عدد سالب نقلب جهة التراجح

انتهت المحاضرة

إعداد: مهيار طعمة ^نهى حبشية ^نور مهرة

لن تنطفئ ببساطة ما دمت تجاهد، تحاول، تريد، وتضيء قلبك بكل مرة.!!