نظري

◄ دكتورة المادة: ملك مارديني

◄ المحاضرة: الرابعة ◄ عنوان المحاضرة: معادلة لوجندر

المحتوى العلمي :

١ـ حل مثالين أحدهما معادلة لوجندر.

٢ـ ملاحظات هامة.

تمرين 1 : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية على شكل سلسلة قوى في x من القوة الخامسة بجوار النقطة $x_0 = 0$:

$$(x^2-1)y''+3xy'+xy=0 \ldots (1)$$

الحل

$$y''+\frac{3x}{x^2-1}y'+\frac{x}{x^2-1}y=0$$

نلاحظ أن $x_0 = 0$ هي نقطة عادية للمعادلة التفاضلية (1).

نبحث عن الحل العام من الشكل:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \quad , \quad y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$$

نعوض كلاً من $y\,,y'\,,y''$ في المعادلة (1) :

$$(x^2-1)y''+3xy'+xy=0$$

$$x^2y''-y''+3xy'+xy=0$$

$$x^2\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}-\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}+3x\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}+x\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n=0$$

$$\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n}_{1} - \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}}_{2} + 3\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n}_{3}$$

$$+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}}_{4} = 0$$

نوحد القوى:

في المتسلسلة (2) نبدل كل n ب $(n+2)$

في المتسلسلة (4) نبدل كل n ب $(n-1)$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} x^n + 3\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n = 0$$

نوحد الحدود الدنيا:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n - 2c_2 - 6c_3 x - \sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} x^n + 3c_1 x$$

$$+3\sum_{n=2}^{\infty} nc_n x^n + c_0 x + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-1} x^n = 0$$

$$-2c_2 - 6c_3 x + 3c_1 x + c_0 x + \sum_{n=2}^{\infty} [n(n-1)c_n - (n+2)(n+1)c_{n+2} + 3nc_n + c_{n-1}]x^n = 0$$

$$-2c_2 - 6c_3 x + 3c_1 x + c_0 x + \sum_{n=2}^{\infty} [n(n+2)c_n - (n+2)(n+1)c_{n+2} + c_{n-1}]x^n = 0$$

وبالمطابقة نجد:

الحد الثابت $= 0 \Rightarrow -2c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

أمثال $\boldsymbol{x}$ $= 0 \Rightarrow -6c_3 + 3c_1 + c_0 = 0 \Rightarrow c_3 = \dfrac{3c_1 + c_0}{6}$

(العلاقة التكرارية) x^n أمثال $= 0 \Rightarrow n(n+2)c_n - (n+2)(n+1)c_{n+2} + c_{n-1} = 0$

$$\Rightarrow c_{n+2} = \frac{n(n+2)c_n + c_{n-1}}{(n+2)(n+1)} \; ; n \geq 2$$

نأخذ قيم n تبدأ من $n = 2$:

$$n = 2 \Rightarrow c_4 = \frac{8c_2 + c_1}{12} = \frac{8(0) + c_1}{12} = \frac{c_1}{12} \Rightarrow c_4 = \frac{c_1}{12}$$

$$n = 3 \Rightarrow c_5 = \frac{3c_3 + c_2}{20} = \frac{3}{4}c_3 = \frac{3}{4}\left(\frac{c_1}{2} + \frac{c_0}{6}\right) \Rightarrow c_5 = \frac{3c_1}{8} + \frac{c_0}{2}$$

والآن نعوض الأمثال في شكل الحل العام:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + \cdots$$

$$y = c_0 + c_1 x + 0 + \left(\frac{c_1}{2} + \frac{c_0}{6}\right)x^3 + \frac{c_1}{12}x^4 + \left(\frac{3c_1}{8} + \frac{c_0}{2}\right)x^5 + \cdots$$

$$y = c_0 \underbrace{\left(1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{2} + \cdots\right)}_{\text{حل خاص أول}} + c_1 \underbrace{\left(x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{12} + \frac{3x^5}{8} + \cdots\right)}_{\text{حل خاص ثاني}}$$

وبالتالي الحل العام هو تركيب خطي للحلين الخاصين... 😍

تمرين 2 :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية في جوار النقطة $x_0 = 0$:

$$(x^2 - 1)y'' + 2xy' - k(k+1)y = 0 \ldots (1)$$

الحل

نلاحظ أن المعادلة التفاضلية (1) تأخذ شكل **معادلة لوجندر** من المرتبة k .

إن $x_0 = 0$ نقطة عادية للمعادلة التفاضلية (1) لنتحقق من ذلك:

$$y'' + \frac{2x}{x^2 - 1}y' - \frac{k(k-1)}{x^2 - 1}y = 0$$

جميع النقاط عادية باستثناء $x_0 = \mp 1$ وبالتالي تكون $x_0 = 0$ نقطة عادية.

نبحث عن الحل العام من الشكل:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \quad , \quad y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

نعود للمعادلة التفاضلية (1) وننشر ومن ثم نعوض $y\,,y'\,,y''$:

$$(x^2-1)y''+2xy'-k(k+1)y=0$$

$$x^2y''-y''+2xy'-k(k+1)y=0$$

$$x^2\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}-\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}+2x\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

$$-k(k+1)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n=0$$

$$\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n}}_{1}-\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}}_{2}+\underbrace{2\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n}}_{3}$$

$$-k(k+1)\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n}_{4}=0$$

لنوحد القوى ولذلك نبدل كل n ب $(n+2)$ في المتسلسلة (2) :

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n}-\sum_{n+2=2}^{\infty} (n+2)\big((n+2)-1\big)c_{n+2} x^{(n+2)-2}+2\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n}$$

$$-k(k+1)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n=0$$

$$\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n}}_{1}-\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} x^{n}}_{2}+\underbrace{2\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n}}_{3}$$

$$-k(k+1)\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n}_{4}=0$$

نوحد الحدود الدنيا:

في المتسلسلة (2), (4) نعوض $n=0$ ثم نكتب المتسلسلة بدءاً من $n=1$:

$$\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}}_{1} - 2c_2 - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}x^n}_{2} + 2\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n}_{3}$$

$$-k(k+1)c_0 - k(k+1)\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n}_{4} = 0$$

في المتسلسلة (2), (3), (4) نعوض $n=1$ ثم نكتب المتسلسلة بدءاً من $n=2$ وبهذا يتم توحيد الحدود الدنيا:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - 2c_2 - 6c_3 x - \sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}x^n + 2c_1 x$$

$$+2\sum_{n=2}^{\infty} nc_n x^n - k(k+1)c_0 - k(k+1)c_1 x - k(k+1)\sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$-2c_2 - 6c_3 x + 2c_1 x - k(k+1)c_0 - k(k+1)c_1 x$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty} [n(n-1)c_n - (n+2)(n+1)c_{n+2} + 2nc_n - k(k+1)c_n]x^n = 0$$

بالمطابقة نجد:

$$\text{الحد الثابت} = 0 \Rightarrow -2c_2 - k(k+1)c_0 = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{-(k+1)k}{2!}c_0$$

$$\text{أمثال } x = 0 \Rightarrow -6c_3 + 2c_1 - k(k+1)c_1 = 0$$

$$\Rightarrow c_3 = -\frac{(k-1)(k+2)}{3!}c_1 = \frac{(2+k)(1-k)}{3!}c_1$$

$$\text{أمثال } x^n = 0 \;(\text{العلاقة التكرارية})$$

$$\Rightarrow n(n-1)c_n - (n+2)(n+1)c_{n+2} + 2nc_n - k(k+1)c_n = 0$$

$$\Rightarrow -(n+2)(n+1)c_{n+2} + (n-k)(n+k+1)c_n = 0$$

$$\Rightarrow c_{n+2}=\frac{(n+k+1)(n-k)}{(n+2)(n+1)}c_n; n\geq 2$$

$$n=2 \Rightarrow c_4=\frac{(3+k)(2-k)}{(4).(3)}c_2=\frac{(3+k)(2-k)}{(4).(3)}.\left(-\frac{k(k+1)}{2!}c_0\right)$$

$$c_4=\frac{-(3+k)(2-k)(1+k)(k)}{4!}c_0$$

$$n=3 \Rightarrow c_5=\frac{(4+k)(3-k)}{(5).(4)}.c_3=\frac{(4+k)(3-k)}{(5).(4)}.\left(\frac{(2+k)(1-k)}{3!}c_1\right)$$

$$\Rightarrow c_5=\frac{(4+k)(3-k)(2+k)(1-k)}{5!}c_1$$

والآن نعوض الأمثال في شكل الحل العام :

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\cdots$$

$$y=c_0+c_1x+\frac{(-(k+1)k)}{2!}c_0.x^2+\frac{(2+k)(1-k)}{3!}c_1.x^3$$

$$+\frac{(-(3+k)(2-k)(1+k)(k))}{4!}c_0.x^4+\frac{(4+k)(3-k)(2+k)(1-k)}{5!}c_1.x^5$$

$$y=c_0\left(1-\frac{(k+1)k}{2!}.x^2-\frac{(3+k)(2-k)(1+k)(k)}{4!}.x^4+\cdots\right)$$

$$+c_1\left(x+\frac{(2+k)(1-k)}{3!}.x^3+\frac{(3+k)(2-k)(1+k)(k)}{5!}.x^5\right)$$

وبهذا يكون الحل العام عبارة عن تركيب خطي للحلي الخاصين...☺

ملاحظات هامة:

أولاً: إذا طلب منا إيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية $y''+p(x)y'+q(x)y=R(x)$ في جوار النقطة العادية $x_0\neq 0$ عندئذٍ نجري الانسحاب $X=x-x_0$ ونبحث عن حل عام من الشكل:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n . X^n$$

وذلك بعد أن نكتب كلاً من p, q, R بدلالة X وبإيجاد الحل العام بدلالة X نبدل كل X ب $(x - x_0)$ فنحصل على الحل العام بجوار النقطة $x_0 \neq 0$.

ثانياً: إن كل نقطة شاذة لحل المعادلة التفاضلية هي نقطة شاذة للمعادلة التفاضلية ولكن العكس غير صحيح بالضرورة.

وللتوضيح سنلجأ للأمثلة:

مثال 1 : لتكن $y = c_1 x + c_2 x^2$ حل عام للمعادلة التفاضلية $y'' - \frac{2}{x} y' + \frac{2}{x^2} y = 0$، نلاحظ أن $x_0 = 0$ هي نقطة شاذة للمعادلة التفاضلية ولكنها ليست نقطة شاذة **لحل** المعادلة التفاضلية.

مثال 2 : لتكن $y = c_1 x^2 + \frac{c_2}{x^2}$ هو حل للمعادلة التفاضلية $y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{4}{x^2} y = 0$ ، نلاحظ $x_0 = 0$ نقطة شاذة للحل و هي نقطة شاذة للمعادلة التفاضلية.

ثالثاً: عندما ننشر بقوى $(x - x_0)$ نميز حالتين:

$\boxed{A}$ إذا كان p , q كثيرا حدود بقوى $(x - x_0)$ أيضاً، عندئذٍ نضرب الحد العام للسلاسل بهذه القوى $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$

$\boxed{B}$ إذا كان p , q كثيرات حدود للقوى x عندئذٍ نكتب p , q بقوى $(x - x_0)$ على الشكل التالي:

$$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 (x - x_0) + \alpha_2 (x - x_0)^2 + \cdots$$

$$q(x) = \beta_0 + \beta_1 (x - x_0) + \beta_2 (x - x_0)^2 + \cdots$$

بالفك و المطابقة بين الطرفين نحصل على الأمثال:

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots \quad ، \quad \beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots$$

وبالتعويض نحصل على p , q بقوى $(x - x_0)$.

مثال: عبر عن كثيرات الحدود $(x^2 + 1)$ بشكل سلاسل قوى ل $(x - 1)$ { بما معناه: أوجد الحل العام بجوار $x = 1$ } :

نفرض أن: $p(x) = x^2 + 1$ ومنه

$$p(x) = x^2 + 1 = \alpha_0 + \alpha_1 (x - 1) + \alpha_2 \underbrace{(x - 1)^2}_{x^2 - 2x + 1}$$

$$= \alpha_0 + \alpha_1 x - \alpha_1 + \alpha_2 x^2 - 2\alpha_2 x + \alpha_2 = (\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_1 - 2\alpha_2)x + \alpha_2 x^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 1 = (\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_1 - 2\alpha_2)x + \alpha_2 x^2$$

بالمطابقة نجد:

$$\text{أمثال } x^2 = 1 \Rightarrow \alpha_2 = 1$$

$$\text{أمثال } x = 0 \Rightarrow \alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 2$$

$$\text{الحد الثابت} = 1 \Rightarrow \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \Rightarrow \alpha_0 = 2$$

إذن نعوض في النشر فيكون:

$$x^2 + 1 = 2 + 2(x-1) + (x-1)^2$$

رابعاً: لا يمكننا النشر في جوار النقطة الشاذة غير النظامية.

خامساً: لإيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة بقوى $(x - x_0)$ نوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة المرافقة ونوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة فيكون الحل العام هو مجموع الحلين العام للمتجانسة والخاص لغير المتجانسة.

ولإيجاد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة نفك من المتسلسلة الحدود التي هي من درجة كثير الحدود R ثم نطابق ونوجد الأمثال.

لكل أمنية موعد، حتى تلك التي تبدو وكأنها مستحيلة،

وما على ربك شيء مستحيل..

انتهت المحاضرة

إعداد: بسمة نصر الله & رهف النقشي & دعاء الرحيل