نظري

◄ دكتور المادة: برلنت مطيط

◄ المحاضرة: الأولى   عنوان المحاضرة : مدخل لطرائق حل المعادلات الخطية

المحتوى العلمي :أهلا بكم أصدقائي في المحاضرة الأولى سنتناول في هذه المحاضرة

1- مقدمة عن التحليل العددي
2- بعض التعاريف المهمة
3- مبرهنة جيشغورين

مقدمة: يعد علم التحليل عددي من العلوم المشتركة بين علوم الرياضيات والهندسة والإحصاء، حيث يبين كيفيه بناء خوارزمية لحل مسائل رياضية، وذلك ضمن شروط رياضية تضمن وجود الحل و وحدانية وشروط هندسية تتحقق فيها الخوارزمية بأقل كتله ممكنه.

◄ **البحث الأول:** الحل العددي لجملة المعادلات الخطية

سنستعرض في هذا الفصل بعض أشهر الطرائق المستخدمة لحل جملة المعادلات الخطية والتي تتمحور في قسمين هما :

1- **الطرائق المباشرة و نستعرض منها :**

أ- طريقة غاوس المعدلة (المحسنة)

ب- طريقة غاوس جوردان

ت- تقنيات المرتكز وسندرس منها :

i. تقنية المرتكز الجزئي

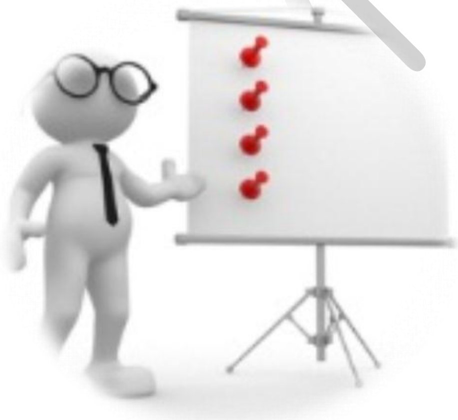
ii. تقنية المرتكز الجزئي الدرجي

ث- طرائق LU وسندرس منها:

i. طريقة كروات

ii. طريقة دوليتل

iii. طريقة تشوليكي



2- الطرائق الكرارية وسنعرض منها:

أ- طريقة جاكوبي

ب-طريقة غاوس سيدل

ت-طريقة $S.O.R$

وقبل البدء في الطرائق .....سنبدأ في بعض التعاريف و التمهيدات المهمة

تعريف(1): نقول عن المصفوفة المربعة $A \in M_n(R)$ إنها شاذة إذا كان $det(A) = 0$ وإنها غير شاذة إذا كان $det(A) \neq 0$.

تعريف(2): نقول عن المصفوفة المربعة $A \in M_n(R)$ أنها متناظرة إذا كان $A = A^T$ حيث A^T منقول مصفوفة A

تعريف(3): نقول عن المصفوفة $A \in M_n(R)$ أنها واحدية إذا كان

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & ; i \neq j \\ 1 & ; i = j \end{cases} \quad \text{نرمز لها } I_n$$

ونرمز لها I_n

تعريف(4): نقول عن المصفوفة $A \in M_n(R)$ أنها قطرية إذا كان

$$a_{ij} = 0 \quad ; i \neq j$$

تعريف(5): نقول عن المصفوفة $A \in M_n(R)$ إنها مثلثية عليا إذا كان

$$a_{ij} = 0 \quad ; i \geq j$$

ويرمز لها بالرمز U

مثال:

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

تعريف(6): نقول عن المصفوفة $A \in M_n(R)$ إنها مثلثية دنيا إذا كان

$$a_{ij} = 0 \quad ; i \leq j$$

نرمز لها L

مثال :

$$L=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&4&0\\4&2&1\end{pmatrix}$$

تعريف(7): نقول عن المصفوفة $A\in M_n(R)$ إنها مسيطرة قطرياً إذا كان

$$|a_{ii}|\geq\sum_{\substack{j=1\\i\neq j}}^{n}|a_{ij}|\qquad ;i=1,\dots,n$$

أي إذا كان كل عنصر من عناصر القطر الرئيسي بالقيمة المطلقة أكبر أو يساوي مجموعة عناصر السطر بالقيمة المطلقة

تعريف(8): نقول عن المصفوفة $A\in M_n(R)$ إنها مسيطرة قطرياً تماماً إذا كان

$$|a_{ii}|\geq\sum_{\substack{j=1\\i\neq j}}^{n}|a_{ij}|\qquad ;i=1,\dots,n$$

أي إذا كان كل عنصر من عناصر القطر الرئيسي بالقيمة المطلقة أكبر تماما من مجموع عناصر السطر بالقيمة المطلقة

مثال : لتكن لدينا

$$A=\begin{pmatrix}7&2&0\\3&5&-1\\0&5&-6\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}6&4&-3\\4&-2&0\\-3&0&1\end{pmatrix}$$

لندرس فيما اذا كانت $A\ ,B$ مسيطرة قطرياً؟

الحل:

_ إن المصفوفة A تحقق أن

$$|7|>|2|+|0|$$

$$|5|>|3|+|-1|$$

$$|-6| > |0| + |5|$$

ومنه A مسيطرة قطرياً تماماً

_ إما بالنسبة للمصفوفة B نلاحظ أن

$$|6| \ngtr |4| + |-3|$$

إذاً B ليست مسيطرة قطريا تماما

تعريف(9): المصفوفة معرفة إيجابيا

1) نقول عن المصفوفة $A \in M_n(R)$ إنها معرفة إيجابياً إذا كانت

أ- تناظرية

ب-إذا كانت $x^T . A . x > 0$ وذلك من أجل كل n وكل شعاع $x \neq 0$

مبرهنة:

2) تكون المصفوفة $A \in M_n(R)$ معرفة إيجابياً إذا كانت جميع المحدودات للمصفوفة الجزئية القائدية

أي

$$A_K = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix}$$

$$A_1 = [a_{11}] \Longrightarrow \det(A_1) > 0 \quad \text{موجب}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Longrightarrow \det(A_2) > 0 \quad \text{موجب}$$

$$\vdots$$

$$A_k \Longrightarrow \det(A_k) > 0 \quad \text{موجب}$$

عندها المصفوفة A معرفة إيجابياً

مثال: أثبت أن المصفوفة التالية معرفة إيجابياً.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

سنقوم بحل التمرين بالطريقتين

الحل

1- من الواضح أن $A = A^T$ تناظرية

2- $0 \neq X \in M_{3\times1}(R)$ (شعاع)

$$X = (x_1, x_2, x_3)$$

$$x^T.A.x = (x_1, x_2, x_3).\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 > 0$$

ما لم يكن $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

☜ **طريقة ثانية**

لدينا
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = [2] \Rightarrow \det(A_1) = 2 > 0$$ موجب

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A_2) = 3 > 0$$ موجب

$$A_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A_3) = 9 > 0$$ موجب

ومنه المصفوفة A معرفة إيجابياً

ملاحظة : $A \in M_n(R)$ مصفوفة معرفة إيجابياً عندئذ:

1- A قابلة للقلب

2- جميع عناصر القطر الرئيسي موجبة تماماً

تعريف(10):القيم الذاتية (طيف المصفوفة)

بفرض $A \in M_n(R)$ نسمي مجموعة قيم λ التي تحقق المعادلة :

$$Ax = \lambda x \quad ; \quad x \neq 0$$

بالقيم الذاتية الموافقة للمصفوفة A أو طيف الصفوفة A

ونسمي الشعاع x بالشعاع الذاتي الموافقة للقيمة الذاتية λ

1- يوجد للمعادلة $x \neq 0 \quad ; \quad \mathrm{A}x = \lambda x$ حل غير صفري إذا كانت
$$\det(A - \lambda I) = 0$$

تسمى المساواة الأخيرة **بالمعادلة المميزة للمصفوفة A** أو كثير الحدود المميزة للمصفوفة A

ويرمز لها بـ $P_n(\lambda)$ حيث n بعد المصفوفة A

تعريف(11):نصف قطر طيف المصفوفة بفرض $\mathrm{A} \in M_n(R)$ نسمي العدد

$$P(A) = max\{|\lambda| : \ Ax = \lambda x \ \ ; x \neq 0\}$$

بنصف القطر الطيفي للمصفوفة A

مثال: أوجد كثير الحدود المميزة للمصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ثم عين القيم الذاتية و الأشعة الذاتية ونصف القطر الطيفي للمصفوفة A

الحل :

$$P_1(A) = \det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(4-\lambda)(1-\lambda) + 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 3)(\lambda - 2) = 0$$

وعلية $\{2,3\}$ هي مجموعة القيم الذاتية الموافقة للمصفوفة A

2- إيجاد الأشعة الذاتية الموافقة لـ A نعوض في العلاقة
$$Ax = \lambda x$$

أي:
$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

ومنه

$$(4-\lambda)x_1 - x_2 = 0$$

$$(2x_1) + (1-\lambda)x_2 = 0$$

بتعويض $\lambda = 2$ في العلاقة الأخيرة نجد أن

$$\Leftarrow x_1 = \frac{1}{2}x_2$$

أي أن $x_2 = 2$ اختيارية

بفرض $x_2 = 2 \Leftarrow x_1 = 1$ ومنه الشعاع الذاتي الموافق للقيم الذاتية $\lambda = 2$ هو $x = (11)^T$

- بنفس الطريقة من أجل $\lambda = 3 \Leftarrow x = (11)^T$
- إيجاد نصف القطر الطيفي للمصفوفة A

$$P(A) = max\{|\lambda| \,; Ax = \lambda x : x \neq 0\}$$
$$= max\{2,3\} = 3$$

مبرهنة جيشغورين :

ليكن A قيمة ذاتية للمصفوفة المربعة $A \in M_n(R)$ عندئذ من أجل أي عدد صحيح $1 \leq j \leq n$ يتحقق أن

$$|a_{jj} - \lambda| \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} |a_{jk}|$$

- بفرض $d_j = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} |a_{jk}|$ (مجموعة عناصر السطر الذي يوجد فيه العنصر a_{jj} بالقيمة المطلقة) حيث $1 \leq j \leq n$

وتسمى مجموعة الأقراص $D_j(a_{jj}, d_j)$ بأقراص جيشغورين

القرص الذي مركزه a_{jj} ونصف قطرة d_j $D_j(a_{jj}, d_j)$;

مثال :

أوجد أقراص جيشغورين الموافقة للمصفوفة

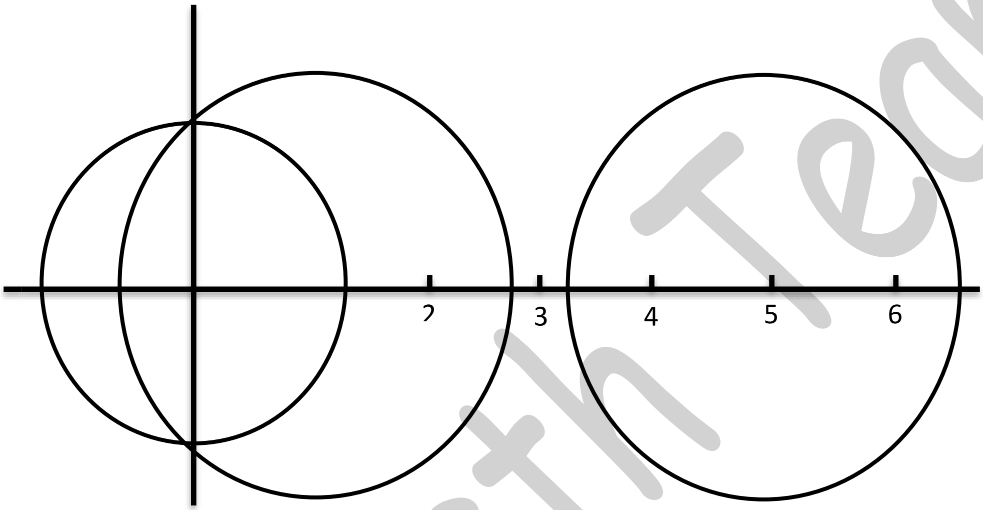
$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 5 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>الحل</u>: لنوجد الأقراص

$$a_{11} = 0 \Rightarrow |a_{11} - \lambda| \leq \sum_{k=2}^{2} |a_{1k}| = 1 \Rightarrow D_1(0,1)$$

$$a_{22} = 5 \Longrightarrow |a_{22} - \lambda| \leq \sum_{k=1}^{2} |a_{2k}| = \frac{3}{2} \Longrightarrow D_2(5, \frac{3}{2})$$

$$a_{33} = 1 \Longrightarrow |a_{33} - \lambda| \leq \sum_{k=2}^{2} |a_{3k}| = \frac{3}{2} \Longrightarrow D_1(1, \frac{3}{2})$$



*وسنكمل في المحاضرة القادمة (جيشغورين المحددة) والإستفادة من الأقراص.

انتهت المحاضرة

إعداد: لبنى الطون – شهناز طاطيش – عبد الرحمن البحش