نظري

◄ دكتور المادة: أحمد هايل

◄المحاضرة: الخامسة ◄ عنوان المحاضرة: المتتالية الكوشية والنقطة الداخلية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

- المتتالية الكوشية وتقاربها ومبرهنات عنها.
- تعريف النقطة الداخلية في مجموعة والجوار لنقطة.
- مبرهنات عن الكرة والمجموعة.

حل التمرين الأخير من المحاضرة السابقة بطريقة ثانية :

في $(\mathbb{R}, |.|)$ أثبت أن المتتالية $\{(-1)^n\}$ غير متقاربة و اعطي مثال عن متتالية جزئية منها .

الحـل

لدينا المبرهنة: إذا كانت $\{x_n\}$ متتالية متقاربة من x فإن كل متتالية جزئية منها متقاربة من x

لنفترض أن $\{(-1)^n\}$ متقاربة من $a \in R$ ولنأخذ منها متتاليات جزئية

$$\left.\begin{array}{l} x_2, x_4, x_6, \ldots\ldots, x_{2k} \ldots\ldots \\ (-1)^2, (-1)^4, (-1)^6, \ldots\ldots, (-1)^{2k} \ldots\ldots \end{array}\right\} x_{n_k} = 1 \to a = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1, x_3, x_5, \ldots\ldots, x_{2k+1} \ldots\ldots \\ (-1)^1, (-1)^3, (-1)^5, \ldots\ldots, (-1)^{2k+1} \end{array}\right\} x_{n_k} = -1 \to a = -1$$

و هذا مستحيل إذا المتتالية غير متقاربة

تعريف المتتالية الكوشية في فضاء متري : ليكن (X, d) فضاء متري ، نقول عن المتتالية $\{x_n\}$ من X إنها كوشية (متتالية كوشي) إذا كان: $\forall \varepsilon > 0 ; \exists n_0 \in N^* : n, m \geq n_0 \Longrightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$:
وإذا كانت كل متتالية كوشية في الفضاء المتري (X, d) متقاربة فنقول عن X أنه تام

مبرهنة : إذا كان (X, d) فضاء متري وكانت $\{x_n\}$ متتالية متقاربة من $x \in X$ فإن هذه المتتالية كوشية

البرهان :

لتكن المتتالية كوشية يجب أن تحقق

$$\forall \varepsilon > 0 \, ; \exists n_0 \in N^* : n, m \geq n_0 \Longrightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

بما أن $\{x_n\}$ متقاربة من x فإن: $\forall \varepsilon > 0 \, ; \exists n_0 \in \mathbb{N}^* : \forall n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$

و ليكن $m \geq n_0 \Rightarrow d(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ عندئذٍ:

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Longrightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

مبرهنة : إذا كان (X, d) فضاء متري وكانت $\{x_n\}$ متتالية كوشية فإن $\{x_n\}$ محدودة

البرهان :

((المتتالية تكون محدودة إذا أمكن إيجاد كرة مفتوحة تحوي عناصرها))

بما أن $\{x_n\}$ كوشية فإن : $\forall \varepsilon > 0 \, ; \exists n_0 \in N^* : n, m \geq n_0 \Longrightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$

لنأخذ مثلاً $\varepsilon = 1$ فنجد أن : $\forall \varepsilon = 1 > 0 \, ; \exists n_0 \in N^* : n, m \geq n_0 \Longrightarrow d(x_n, x_m) < 1$

ولنضع $a = x_{n_0}$ ولدينا $m \geq n_0 \;\; <= \;\; d(x_{n_0}, x_m) < 1 \;\; <= \;\; d(a, x_m) < 1$

ولنأخذ $r = 1 + d(a, x_1) + d(a, x_2) + d(a, x_3) + \cdots \ldots \ldots \ldots + d(a, x_{n-1})$

و بالتالي إذا كان $1 \leq m < n_0 \;\; <= \;\; d(a, x_m) \leq d(a, x_1) + \cdots + d(a, x_{n_0 - 1}) < r$

وإذا كان $m \geq n_0 \;\; <= \;\; d(a, x_m) < 1 < \mathrm{r}$

$$\forall \, m \in N^* : d(a, x_m) < r \Longrightarrow x_m \in \; N(a, r)$$

وجدنا كرة مفتوحة $N(a, r)$ مركزها a ونصف قطرها r بحيث $\{x_n\} \subseteq N(a, r)$ اذا $\{x_n\}$ محدودة

تعريف النقطة الداخلية في مجموعة A: نقول عن $x \in A$ إنها نقطة داخلية في A إذا وجد $0 < \varepsilon$ بحيث $N(x, \varepsilon) \subseteq A$ ونرمز لمجموعة النقاط الداخلية في A بالرمز A° أو $(int\, A)$ **وندعوه** A° **داخل** A

تعريف الجوار لنقطة : إذا كانت $a \in X$ وكانت v مجموعة جزئية في X بحيث نوجد مجموعة مفتوحة في X مثل w بحيث $a \in w \subseteq v$ عندئذ نسمي v جوارا ل a

تعريف الجوار المفتوح لنقطة : لتكن $a \in X$ نقول أن v جوارا مفتوحا ل a إذا كانت v نفسها مجموعة مفتوحة .

مبرهنة : الكرة المفتوحة في أي فضاء متري مجموعة مفتوحة

البرهان:

لنثبت أنها مجموعة مفتوحة يجب إيجاد كرة مفتوحة محتواه فيها

ليكن $a \in X$ و $N(a,\varepsilon)$ كرة مفتوحة في X

ليكن $x \in N(a,\varepsilon) \quad <= \quad d(x,a) < \varepsilon$

ليكن $0 < r = \varepsilon - d(x,a)$

ليكن $y \in N(x,r) \quad <= \quad d(y,x) < r = \varepsilon - d(x,a)$

لدينا متراجحة المثلث $d(y,a) \le d(y,x) + d(x,a) < \varepsilon - d(x,a) + d(x,a) = \varepsilon$

$$=> \ d(y,a) < \varepsilon \quad => \quad y \in N(a,\varepsilon) \quad => \quad N(x,r) \subseteq N(a,\varepsilon)$$

مبرهنة : الكرة المغلقة في أي فضاء متري مجموعة مغلقة

البرهان:

لتكن $B(a,\varepsilon)$ كرة مغلقة في X نريد إثبات أن $B(a,\varepsilon)$ مجموعة مغلقة

وذلك ببرهان أن $X \backslash B(a,\varepsilon)$ مجموعة مفتوحة أي توجد كرة مفتوحة تحويها

ليكن $x \in X\backslash B(a,\varepsilon)$ فإن $0 < r = d(x,a) - \varepsilon \quad <= \quad d(x,a) > \varepsilon \quad <= \quad 0 < r$

ليكن $y \in N(x,r)$ فإن $d(y,x) < r = d(x,a) - \varepsilon$

$$=> d(y,x) + \varepsilon < d(x,a) \le d(x,y) + d(y,a)$$

$$=> d(y,x) + \varepsilon < d(x,y) + d(y,a) => \varepsilon < d(y,a) => y \in X\backslash B(a,\varepsilon)$$

$$=> N(x,r) \subseteq X\backslash B(a,\varepsilon)$$

ومنه $X\backslash B(a,\varepsilon)$ مفتوحة ومنه $B(a,\varepsilon)$ مغلقة

مثال: عن متتالية كوشية لكن غير متقاربة

ليكن : $X = N^*$ و $d: X \times X \to \mathbb{R}$ $\quad d(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$.

الحـل

إن d تابع مسافة لأن: $d(x,y) \geq 0 , \forall x,y,z \in X$:

$$d(x,y)=0 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|=0 \Leftrightarrow \frac{1}{x}=\frac{1}{y} \;=> x=y$$

وواضح أن $d(x,y)=\left|-\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)\right|=\left|\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right|=d(y,x)$

$$d(x,z)=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{z}\right|=\left|\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)+\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\right)\right| \leq \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|+\left|\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\right|$$
$$=d(x,y)+d(y,z)$$

من أجل إثبات أن المتتالية $\{x_n\}$ كوشية ، يجب أن نثبت أنه من أجل $\varepsilon > 0$ و لنأخذ $n_0 > \frac{2}{\varepsilon}$ وليكن $n,m > n_0$ عندئذ:

$$d(x_n,x_m)=\left|\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_m}\right|=\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right| \leq \frac{1}{n}+\frac{1}{m} \leq \frac{1}{n_0}+\frac{1}{n_0}=\frac{2}{n_0}<\varepsilon$$

و بالتالي هي متتالية كوشي ، إلا أنها غير متقاربة بسبب ما يلي فلنفرض أنها متقاربة من $p \in X$ عندئذٍ:

$$d(x_n,p) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad => \quad d(x_n,p)=\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{p}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \text{مستحيلة}$$

فالمتتالية متباعدة وبالتالي الفضاء (X,d) غير تام.

انتهت المحاضرة

إعداد: ناريمان جلو - هديل سعيد - هالة مصطفى