12-3-2018

نظري

◄ دكتورة المادة: ريم الحاج خليفة

◄ المحاضرة: الأولى عنوان المحاضرة: تعريف الحلقة

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١- مفاهيم اساسية (تعريف الحلقة مع أمثلة) .

٢- الحلقة الجزئية مع مبرهنة .

٣- أمثلة على الحلقة الجزئية .

سنبدأ معكم اصدقائي بمقرر البنى الجبرية (٢) أو ما يسمى بنظرية الحلقات (Ring Theory)

مفاهيم اساسية :

تعريف الحلقة : لتكن $\mathcal{R}$ مجموعة غير خالية مزودة بقانوني تشكيل داخليين الأول $(+)$ والثاني $(.)$ نقول عن البنية $(\mathcal{R}, +, \ .)$ أنها حلقة إذا وفقط أذا تحققت الشروط التالية :

$$\forall\ a, b, c \in \mathcal{R}$$

- القانوني الأول قانون تشكيل داخلي $a + b \in \mathcal{R}$

- تبديلية

$$a + b = b + a$$

- تجميعية

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

- يوجد عنصر حيادي بالنسبة لعملية الجمع ونرمز له بـ 0 يحقق

$$a + 0 = 0 + a = a$$

- لكل عنصر نظير جمعي أي
- $\forall\ d \in \mathcal{R}: \exists -d \in \mathcal{R} \quad : \quad d + (-d) = d - d = 0$

إن الشروط الأربعة الخمسة تتلخص بكون $(\mathcal{R}, +)$ زمرة تبديلية .

- بالنسبة للقانون الثاني ايضاً قانون تشكيل داخلي

$$a.b \in \mathcal{R}$$

ويجب أن يحقق التجميعية وهذا الشرط مع شرط الضرب الداخلي يجعل $(\mathcal{R},.)$ شبه زمرة

$$(a.b).c = a.(b.c)$$

- الضرب توزيعي على الجمع ($(.)$توزيعي على $(+)$) (من اليمين ومن اليسار)

$$a.(b+c) = a.b + a.c$$
$$(b+c).a = b.a + c.a$$

وبالتالي تكون $(\mathcal{R},+,.)$ حلقة .

تعاريف :

- تسمى $\mathcal{R}$ حلقة تبديلية إذا تحققت

$$\forall\, a,b \in \mathcal{R} : a.b = b.a$$

(اي اذا كانت خاصية التبديلية الضربية محققة نقول عن الحلقة انها تبديلية اما خاصة التبديلية **الجمعية** فهي اساسية بالتعريف ولا علاقة لها بتبديلية الحلقة ابدا).

- نقول عن العنصر $e_1 \in \mathcal{R}$ أنه عنصر محايد (ضربي) من اليمين اذا تحقق الشرط التالي :

$$c.e_1 = c \quad : \forall c \in \mathcal{R}$$

- نقول عن العنصر $e_2 \in \mathcal{R}$ أنه عنصر محايد (ضربي) من اليسار اذا تحقق الشرط التالي :

$$e_2.d = d \quad : \forall d \in \mathcal{R}$$

- نقول عن العنصر $e \in \mathcal{R}$ أنه محايد (ضربي)اذا تحقق الشرط التالي :

$$e.a = a.e = a \quad : \forall a \in \mathcal{R}$$

يكون المحايد من اليمين يساوي المحايد من اليسار اذا كانت $\mathcal{R}$ تبديلية .

نتيجة : الشرط اللازم والكافي ليكن العنصر e عنصراً محايداً في $\mathcal{R}$ هو أن يكون محايداً من اليمين ومن اليسار في ان واحد أما المحايد الجمعي فيدعى صفر الحلقة .

- نقول عن الحلقة $\mathcal{R}$ أنها واحدية اذا وجد فيها محايد ضربي .

أمثلة :

١- $(\mathbb{Z},+,.)$ حلقة واحدية تبديلية .

٢- $\boldsymbol{Z_n = \{0,1,2,3,4,5,6,\dots\dots\dots,(n-1)\}}$ تشكل حلقة تبديلية واحدية بالنسبة لعملية الجمع و الضرب بالمقاس (n) و العنصر المحايد هو 1 .

٣- من أجل $n>1$ فإن $(n\mathbb{Z},+,.)$ حلقة تبديلية لكن غير واحدية .

مثال : $2\mathbb{Z} = \{0,\mp2,\mp4,\mp6\dots\dots\dots\} =< 2 >$ تشكل حلقة بالنسبة لجمع وضرب الأعداد الصحيحة وهي حلقة تبديلية ولكنها لا تحوي محايد ضربي فهي غير واحدية .

٤- $(\mathcal{M}_{n\times n},+,\cdot)$(المصفوفة المربعة) تشكل حلقة واحدية وليست تبديلية (الضرب غير تبديلي في المصفوفات) .

٥- مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ ليست حلقة لأنها من الأساس ليست زمرة .

الحلقة الجزئية : ليكن $\mathcal{R}$ حلقة و S مجموعة جزئية غير خالية من $\mathcal{R}$ نقول عن المجموعة S أنها حلقة جزئية في $\mathcal{R}$ اذا كانت S تشكل حلقة بحد ذاتها (بالنسبة للعمليتين المعرفتين على $\mathcal{R}$) .

مبرهنة : لتكن $\mathcal{R}$ حلقة و S مجموعة جزئية غير خالية من $\mathcal{R}$ الشرط اللازم والكافي لتكون S حلقة جزئية في $\mathcal{R}$ هو أن يتحقق الشرطان الآتيان :

١) $\forall a,b \in S \quad ; \quad a-b \in S$
٢) $\forall a,b \in S \quad ; \quad a.b \in S$

البرهان :

لزوم الشرط لنفرض أن S حلقة جزئية من الحلقة $\mathcal{R}$ عندئذٍ S تحقق جميع الشروط السابقة (التي وردت سابقا في تعريف الحلقة) هذا يعني أنه :

$$\forall\, a\,,b \in S:$$

$$a-b \in S \;\&\; a.b \in S$$

اي الشرطان محققان .

كفاية الشرط بفرض أن S تحقق الشروط :

$$\forall\, a,b \in S\,;\; a-b \in S \quad \& \quad a.b \in S$$

ولما كانت $\mathcal{R}$ حلقة عندئذٍ تشكل $\mathcal{R}$ زمرة تبديلية بالنسبة للجمع ولما كانت المجموعة S تحقق الشرط :

$$\forall\, a,b \in S\,; a-b \in S$$

فإن $(S,+)$ **زمرة**.

ولما كانت S مغلقة بالنسبة للضرب ولأن $\mathcal{R}$ حلقة فإن S تحقق شرط التجميعية (بالنسبة للضرب)

فإن $(S,.)$ **نصف زمرة** .

ونلاحظ أن شرط توزيع الضرب على الجمع محقق من اليمين واليسار فنجد أن $\boldsymbol{S}$ حلقة جزئية في $\mathcal{R}$.

تعريف

ليكن $\mathcal{R}$ حلقة عندئذ المجموعة المؤلفة من الصفر هي حلقة جزئية بحد ذاتها و نسميها حلقة جزئية تافهة.

أمثلة

1. ليكن $n \geq 1$ عدداً صحيحاً إن المجموعة $n\mathbb{Z} = \{0, \pm n, \pm 2n, \pm 3n, \dots \dots .\,.\}$

هل تشكل حلقة جزئية من الحلقة $\mathbb{Z}$ ؟

الحل :

(يكون الحل بالتحقق من الشرطين الموجودين بالمبرهنة الأخيرة)

$$\forall\, a,b \in \mathbb{Z} \;\; k,t \in \mathbb{Z}\,; a = n.k\,, b = n.t$$

$$\circ \;\; a-b = n.k - n.t = n\underbrace{(k-t)}_{\in\mathbb{Z}} \Rightarrow a-b \in n\mathbb{Z}$$

الشرط الاول تحقق

$$\circ \;\; a.b = (n.k).(n.t) = n\underbrace{(k.n.t)}_{\in\mathbb{Z}} \Rightarrow a.b \in n\mathbb{Z}$$

الشرط الثاني تحقق

وبالتالي المجموعة $n\mathbb{Z}$ هي حلقة جزئية من حلقة الأعداد الصحيحة .
وهذه المجموعة هي حلقة واحدية وتبديلية بحيث $n = 1$
ولكن عندما تكون $n > 1$ عندئذٍ لا يوجد عنصر محايد بالنسبة للضرب .

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{Z} \right\} \quad 2.$$

هل تشكل المجموعة S حلقة جزئية من $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ ؟

الحل :

ليكن لدينا $\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$

$\forall\, a, b, c, d \in \mathbb{Z}$

- وليكن $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-c & 0 \\ 0 & b-d \end{bmatrix} \in S$
- $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a.c & 0 \\ 0 & b.d \end{bmatrix} \in S$

الشرطين تحققا اذاً S حلقة جزئية من الحلقة $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

هل هذه الحلقة واحدية ؟

نعم لأن $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ هو عنصر محايد أي أنه يمكن أن تكون $a = b = 1$.

مبرهنة : إذا كانت $\mathcal{R}$ حلقة فإن تقاطع أي مجموعة غير خالية من الحلقات الجزئية في $\mathcal{R}$ هو حلقة جزئية في $\mathcal{R}$.

البرهان :

بفرض أن $S = \{A_i \,; \forall\, i \in I\}$ حيث S مجموعة الحلقات الجزئية من الحلقة $\mathcal{R}$

بما أن $\forall\, i \in I : 0 \in A_i$ فإن $0 \in \cap_{\,i\in I} A_i$ وبالتالي فإن $\cap_{\,i\in I} A_i \neq \emptyset$

ليكن $x, y \in \cap_{\,i\in I} A_i$ عندئذٍ بما أن $\forall\, i \in I :\ x, y \in A_i$

وبمان أن A_i حلقة جزئية في $\mathcal{R}$ فإن :

$$x - y \in A_i \Longrightarrow x - y \in \cap_{\,i\in I} A_i$$

وبالتالي الشرط الأول محقق .

وايضاً لما كانت A_i حلقة جزئية في $\mathcal{R}$ فإن :

$$x.y \in A_i \,; \forall i \in I \Longrightarrow x.y \in \cap_{i \in I} A_i$$

اذا S هي حلقة جزئية من الحلقة $\mathcal{R}$.

ملاحظة : اجتماع حلقتين جزئيتين من الحلقة ليس بالضرورة أن يكون حلقة جزئية البب هو أن اجتماع زمرتين جزئيتين ليس بالضرورة أن يكون زمرة جزئية .

مثال على الملاحظة : لنأخذ حلقة الاعداد الصحيحة ولنأخذ حلقتين جزئيتين من حلقة الاعداد الصحيحة ولتكن $2\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z}$ نجد أن $2,3 \in 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$ ولكن $3 - 2 = 1 \notin 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$ ومنه فإن $2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$ **ليست حلقة جزئية في حلقة الأعداد الصحيحة .**

حتى الأيدي التي امتدت إليك لتساعدك..

كان الله هو من سخّرها لك.

انتهت المحاضرة

إعداد:هلا همج – لانا شهاب – احمد ابو التوت