نظري

◄ دكتور المادة: نايف الطلي

◄ المحاضرة: الأولى و الثانية عنوان المحاضرة: مقدمة عن التحليل 5

مفردات المقرر:

1- مقدمة (مراجعة لبعض أفكار التحليل 1) و هذا ما سنتطرق إليه في هذه المحاضرة.

2-الفصل الأول: الدوال ذات التغير المحدود

a) مقدمة في التحليل 5
b) تعريف الدوال ذات التغير المحدود
c) خواص الدوال ذات التغير المحدود
d) معايير الدوال ذات التغير المحدود
e) تطبيقات الدوال ذات التغير المحدود

3-الفصل الثاني: تكامل استيلجس

4-الفصل الثالث: مقدمة في نظرية القياس

5-الفصل الرابع: تكامل لوبيغ

مراجع المقرر:

1- تحليل 5 للدكتور محي الدين بحبوح و الدكتور جمال مللي

2- تحليل 5 للدكتور ابراهيم ابراهيم

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1- تعريف دالة الحقيقية و بعض صفاتها
2- الدالة المطردة (نتائج و أمثلة)
3- الدالة المحدودة (نتائج)
4- نهاية دالة عند نقطة
5- استمرار الدالة عند نقطة ثم عند مجال
6- نقاط الانقطاع
7- القفزة (بعض المبرهنات)
8- الاشتقاق (بعض المبرهنات)
9- الدوال المركبة

بسم الله الرحمن الرحيم

1- تعريف دالة: علاقة تربط كل عنصر من المنطلق بعنصر واحد فقط من المستقر $f: X \to Y$

$$\forall x \in X , \exists! \, y \in Y : f(x) = y$$

اذا كانت $y \subseteq \mathbb{R}$ فإنه تابع حقيقي

بعض صفات الدالة $f: X \to Y$:

- التباين: $\forall x_1, x_2 \in X: f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

أو $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

- غامر: $\forall y \in Y : \exists x \in X : f(x) = y$

ملاحظة: اذا اخذنا المستقر الفعلي للدالة او للتابع تكون الدالة غامر

- التقابل: نقول عن الدلة f انها تقابل اذا كانت متباينة و غامر و بالتالي يوجد تقابل عكسي.

- دالة الزوجية: $f(-x) = f(x): x, -x \in X$

- دالة فردية: $f(-x) = -f(x): x, -x \in X$

و لكن الدالة بالحالة العامة ليس من الضروري أن تكون إما فردية أو زوجية

مثال: x^2 دالة زوجية , x دالة فردية , و لكن $2x + 1$ دالة ليست فردية او زوجية

2- الدوال المطردة على المجال X: (ضمن مجموعة التعريف X):

نقول عن الدالة f انها مطردة إذا كانت متزايدة أو متزايدة تماما أو متناقصة أو متناقصة تماما على X

نميز الحالات:

-1 $\forall x_1, x_2 \in X: x_1 < x_2 \, f(x_1) \leq f(x_2)$ تكون متزايدة على X

-2 $\forall x_1, x_2 \in X: x_1 < x_2 \, f(x_1) \geq f(x_2)$ تكوم متناقصة على X

-3 $\forall x_1, x_2 \in X: x_1 < x_2 \, f(x_1) < f(x_2)$ تكون متزايدة تماما على X

-4 $\forall x_1, x_2 \in X: x_1 < x_2 \, f(x_1) > f(x_2)$ تكون متناقصة تماما على X

ملاحظة: - دالة f متزايدة على $X \Leftarrow -f$ متناقصة على X

- دالة f متناقصة على X ⇐ $-f$ متزايدة على X

مثال:

$f(x) = x^2$ متزايدة على $[0, +\infty[$ ومتناقصة على $]-\infty, 0]$

$f(x) = -x^2$ متناقصة على $[0, +\infty[$ ومتزايدة على $]-\infty, 0]$

$f(x) = x$ متزايدة على $\mathbb{R}$

$f(x) = -x$ متناقصة على $\mathbb{R}$

3- الدوال المحدودة:

نقول عن الدالة f انها محدودة على X اذا تحقق ما يلي: $\exists m > 0 : |f(x)| \leq m : \forall x \in X$

و هذا يعني انها محدودة من الأدنى و الأعلى و يمكن القول أنها محدودة من الأدنى اذا تحقق الشرط

$$\exists a \in \mathbb{R} : a \leq f(x), \forall x \in X$$

و يمكن القول أنها محدودة من الأعلى اذا تحقق الشرط:

$$\exists b \in \mathbb{R} : f(x) \leq b, \forall x \in X$$

مثلا: $y = \sin(x) \quad : \quad \forall x \in \mathbb{R}$ محدودة لأن:

$$\exists m = 1 > 0 : |\sin(x)| \leq 1 \quad : \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

مثال أخر: $f(x) = \frac{1}{x} \qquad x \in]0, +\infty[$

نلاحظ أن f ليست محدودة على المجال $]0, +\infty[$ لأن $f(x)_{x \to 0} \to +\infty$

أما f محدودة على المجال $[2, +\infty[$ لأن:

$$\exists m = \frac{1}{2} > 0 : \left|\frac{1}{x}\right| \leq \frac{1}{2} : \forall x \in [2, +\infty[$$

مثال: $f(x) = x^2$ متزايدة و محدودة على المجال $[0,5]$

مثال: $f(x) = -x^2$ متناقصة و محدودة على المجال $[0,5]$

-حالات خاصة:

- f معرفة على $[a,b]$ و متزايدة فإن: $f(x) \le f(b): \forall x \in [a,b]$
- f معرفة على $[a,b]$ و متناقصة فإن: $f(x) \le f(a): \forall x \in [a,b]$

4- نهاية دالة عند النقطة x_0:

نقول عن الدالة f إن لها نهاية عند x_0 اذا كانت معرفة في جوار x_0 أي معرفة في جوار x_0 و ليس بالضرورة ان تكون معرفة على x_0 و تحقق ما يلي:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\>}} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0\\<}} f(x) = A : A \in \mathbb{R}$$

و يكتب هذا الشرط أيضا بالشكل $f(x_0+0) = f(x_0-0) = A : A \in \mathbb{R}$

مثال: أوجد نهاية الدالة $y = \frac{x^2-1}{x-1}$ عند $x = 1$ نلاحظ أن الدالة معرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية فرق الصفر.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\<\\>}} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\<\\>}} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2$$

5- استمرار f عند x_0:

نقول عن الدالة f انها مستمرة عند x_0 اذا كانت معرفة عند x_0 و معرفة في جوار ال x_0 و تحقق الشرط:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\>}} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0\\<}} f(x) = f(x_0)$$

و يمكن أن تكتب بالشكل $f(x_0+0) = f(x_0-0) = f(x_0)$

استمرار على مجال:

نقول عن الدالة f انها مستمرة على المجال $[a,b]$ اذا كانت:

1- مستمرة عند كل نقطة من $]a,b[$

2- $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = f(a)$

3- $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} f(x) = f(b)$

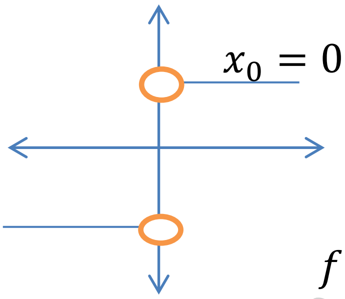
6- نقاط الانقطاع:

نقول عن النقطة x_0 انها نقطة انقطاع للدالة f اذا كانت f غير مستمرة عندها و هي 3 أنواع:

1- x_0 نقطة انقطاع من النوع الأول اذا تحقق:

$$\left.\begin{matrix} \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) \\ \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) \end{matrix}\right\} \Rightarrow A \neq B : \qquad A, B \in R$$

مثال: $f(x) = \frac{|x|}{x}$ إن $x_0 = 0$ نقطة انقطاع لأن الدالة غير معرفة عند $x_0 = 0$

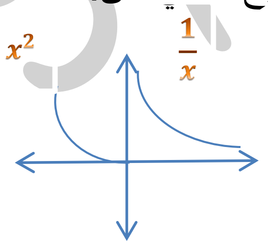


فهي غير مستمرة عندها حسب الشرط الأول للاستمرار

$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ و منه $f(x) \xrightarrow[\substack{x \to x_0 \\ <}]{} -1 \neq f(x) \xrightarrow[\substack{x \to x_0 \\ >}]{} 1$

2- النوع الثاني: نقول عن x_0 انها نقطة انقطاع من النوع الثاني اذا كانت احدى النهايات غير موجودة أو ∞

مثال: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ x^2, & x \leq 0 \end{cases}$ عند $x_0 = 0$ هي نقطة انقطاع من النوع الثاني، لأن:



$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} x^2 = 0$$

و منه تتحقق شروط نقطة الانقطاع من النوع الثاني.

3- قابلة للإزالة:

نقول عن النقطة x_0 انها قابلة للإزالة اذا كانت......

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) \in R$$

مثال: $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ إن f غير معرفة على $x_0 = 2$ و منه إن x_0 نقطة انقطاع للدالة و هي من النوع الثالث لأن $lim_{\substack{x \to 2 \\ > \\ <}} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$ و في هذ الحالة يمكن تمديد هذه الدالة إلى دالة مستمرة $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & x \neq 2 \\ 4 & x = 2 \end{cases}$ ومنه تصبح الدالة الممددة g معرفة على $x_0 = 2$

7- القفزة:

لتكن f دالة معرفة على $[a,b]$ $x_0 \in]a,b[$

القفزة عند x_0 تكون :	$f(x_0+0) - f(x_0-0)$
القفزة من اليمين عند x_0	$f(x_0+0) - f(x_0)$
القفزة من اليسار عند x_0	$f(x_0) - f(x_0-0)$
القفزة عند a	$f(a+0) - f(a)$
القفزة عند b	$f(b) - f(b-0)$

مبرهنات بدون برهان:

a. اذا كانت f معرفة على المجال $[a,b]$ و كانت f مطردة على نفس المجال فإن جميع نقاط الانقطاع من النوع الاول (إن وجدت)

b. مجموعة نقاط الانقطاع للدوال المطردة هي مجموعة منتهية أو عدودة و إذا كانت متزايدة فإن المتراجحة :

$$[f(a+0)-f(a)]+\sum_{k=1}^{\infty}[f(x_k+0)-f(x_k-0)] + [f(b)-f(b-0)] \le f(b)-f(a)$$

محققة.

8- الاشتقاق:

نقول عن الدالة f انها قابلة للاشتقاق عند النقطة x_0 اذا كانت معرفة في جوال ال x_0 حيث $x_0 \in]a,b[$ و عند النقطة x_0 و تحقق الشرط:

$$\exists A \in \mathbb{R}: \lim_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = A$$

و نرمز ل A ب $f'(x_0)$

ملاحظة: كل دالة قابلة للاشتقاق عند x_0 تكون مستمرة عند x_0 و العكس ليس صحيح بالضرورة

مثال $f(x)=|x|$ إن f معرفة و مستمرة على مجموعة الأعداد الحقيقية و هي مستمرة عند الصفر ايضا لنرى هل هي قابلة للاشتقاق عند $x_0=0$

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ >}} \frac{|x|-0}{x-0} = \begin{cases} 1 & : x>0 \\ -1 & : x<0 \end{cases} \neq A$$

النهايتان مختلفتان و منه إن f غير قابلة للاشتقاق عند الصفر

-الاشتقاق على المجال المغلق [a, b]:

1- نقول عن الدالة f انها قابلة للاشتقاق على المجال المغلق $[a,b]$ اذا كان:

-1 قابلة للاشتقاق عند كل نقطة $x_0 \in]a,b[$

-2 قابلة للاشتقاق عند a من اليمين أي

$$\exists A \in R: \lim_{\substack{> \\ x \to a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = A$$

-3 قابلة للاشتقاق عند b من اليسار أي

$$\exists B \in R: \lim_{\substack{< \\ x \to b}} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = B$$

مثال: $f(x) = x^2$ على المجال $[0,2]$ ادرس قابلية الاشتقاق. (وظيفة)

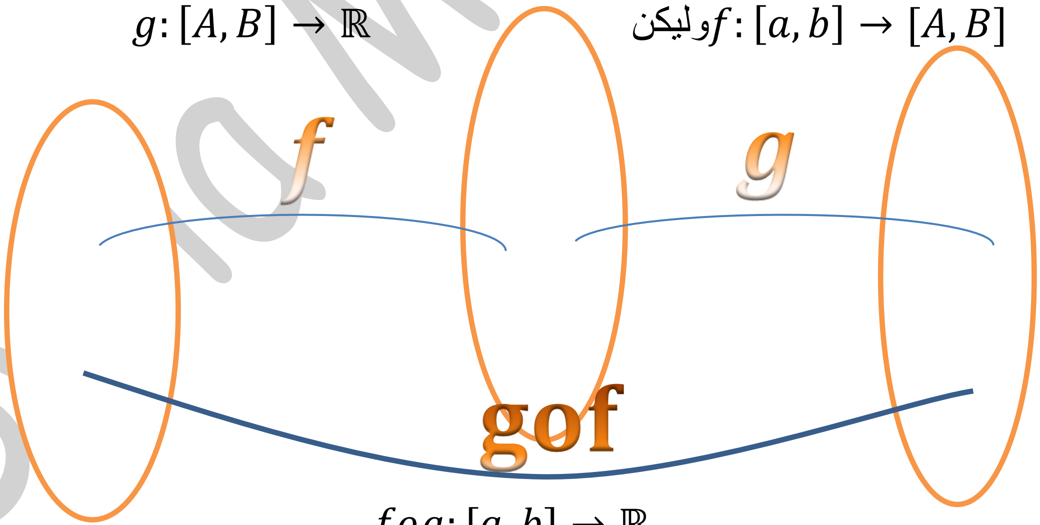
مبرهنات عن الاشتقاق:

-اذا كانت f مستمرة على مجال مغلق $[a, b]$ و كانت f قابلة للغشتقاق عند كل نقطة من $x_0 \ni]a, b[$ عندئذ:

- الشرط الازم و الكافي لكي تكون f متزايدة هو أن تكون $f'(x) \geq 0$
- الشرط الازم و الكافي لكي تكون f متناقصة هو أن تكون $f'(x) \leq 0$

9- الدوال المركبة:

ليكن $f: [a, b] \to [A, B]$ وليكن $g: [A, B] \to \mathbb{R}$



$$fog: [a, b] \to \mathbb{R}$$

$$x \to (gof)(x) = g\big(f(x)\big)$$

مبرهنة: اذا كانت f متزايدة على $[a, b]$ و كانت g مطردة على $[A, B]$ فإن gof مطردة

حالات خاصة من المبرهنة:

- كانت g متزايدة على $[A,B]$ فإن gof تكون متزايدة على $[a,b]$
- كانت g متناقصة على $[A,B]$ فإن gof تكون متناقصة على $[a,b]$

تمارين وظيفة:

fمتزايدة على $[a,b]$ و g متزايدة على $[a,b]$ ايضا اوجد فيما اذا كان

$f+g\ ,f-g\ ,f.g\ ,\frac{f}{g}$ متزايدة أم لا؟؟

الحل: أولا $f+g$ حتى تكون متزايدة يجب ان يتحقق:

$$(f+g)(x_1) \le (f+g)(x_2) : x_1,x_2 \in [a,b]$$

1- إن f متزايدة ومنه $x_1,x_2 \in [a,b] : x_1 < x_2 \implies f(x_1) \le f(x_2)$

2- إن g متزايدة ومنه $x_1,x_2 \in [a,b] : x_1 < x_2 \implies g(x_1) \le g(x_2)$

بجمع 1 و 2 نجد: $f(x_1)+g(x_1) \le f(x_2)+g(x_2)$

$$(f+g)(x_1) \le (f+g)(x_2)$$

ومنه فإن $f+g$ متزايدة.

الأن $f-g$ ليس بالضرورة ان يكون الطرح الدالتين متزايد على كل المجال $[a,b]$ وللتأكيد نأخذ مثال يثبت ما سبق:

$$f(x) = x^2 : x \in [0,2] \quad and \quad g(x) = x : x \in [0,2]$$

إن $f\ and\ g$ دوال متزايدة على المجال $[0,2]$ أي $f'(x) = 2x : x \in [0,2]$

$$g'(x) = 1 : x \in [0,2]$$

و منه $2x - 1 = 0 \to x = \frac{1}{2}$

x	0 1/2 2
$\mu'(x)$	----------------------0++++++++++++ يخالف (متناقص) (متزايد) يوافق

نلاحظ أن طرح دالتين متزايدتين ليس متزايد دوما

بالنسبة ل $f.g$ جداء دالتين متزايدتين على $X=[a,b]$ ليس بالضرورة أن يكون متزايد على X لنأخذ مثال للتأكيد

$$f(x)=x\ ,x\in[0,2]\qquad,\qquad g(x)=x-1,x\in[0,2]$$

معرفين على المجال $[0,2]$ ومنه بالشتقاق $f'(x)=1>0\ \ ,\ \ g'(x)=1>0$

$$\mu(x)=f(x).g(x)=x^2-x$$

$$\mu'(x)=2x-1$$

$$2x-1=0\ \rightarrow x=\frac{1}{2}$$

x	0 1/2 2
$\mu'(x)$	---------------------0++++++++++++ يخالف (متناقص) (متزايد) يوافق

نلاحظ أن جداء دالتين متزايدتين ليس دالة متزايدة دوما......

$$\frac{f}{g}$$

القسمة ايضا بنفس الأسلوب و لكن بأخذ $g(x)=x-1$ and $f(x)=x$ معرفين على المجال $I=[2,5]$

ينتج لدينا بقسمة الدلتين دالة جديدة $\mu(x)=\frac{x}{x-1}$ بالشتقاق $\mu'(x)=\frac{x-1-x}{(x-1)^2}=-\frac{1}{(x-1)^2}$

و هي دوما سالبة اي انا الدالة الناتجة متناقصة و منه يتم المطلوب.

الأن بفرض f and g متناقصة على $[a,b]$ ايضا اوجد فيما اذا كان $f+g\ ,f-g\ ,f.g\ ,\frac{f}{g}$ متناقصة أم متزايدة ؟؟؟ حلها بنفس أسلوب التمرين السابق.

انتهت المحاضرة

إعداد: شهد الحايك البوشي *صفا ايوبي*ياسين الحلبي

إجبار نفسك على الابتسام لعدة ثواني حتى لو كنت لا ترغب في ذلك يقلل من مستويات التوتر لديك ويحسن مزاجك

ابتسم!

iom to improve our mathematics