نظري

◄ دكتور المادة: نايف الطلي

◄ المحاضرة: الرابعة   عنوان المحاضرة: الدوال ذات التغير المحدود

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1. خواص الدوال ذات التغير المحدود
2. بعض النتائج للخواص
3. معايير الدوال ذات التغير المحدود
4. بعض التمارين

خواص الدوال ذات التغير المحدود

-1 اذا كانت f دالة ذات تغير محدود على المجال المغلق $[a,b]$ فإن f دالة محدودة على المجال $[a,b]$ و لكن العكس ليس بالضرورة صحيح (أنظر الى المسألة 3 في المحاضرة السابقة السطر التاسع)

-2 اذا كانت f دالة ذات تغير محدود على المجال المغلق $[a,b]$ فإن $|f|$ دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ ولكن العكس ليس بالضرورة صحيح

-3 اذا كانت f دالة ذات تغير محدود على المجال المغلق $[a,b]$ فإن:

a) αf دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$

b) $\frac{1}{f}$ دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ بشرط أن تكون $\forall x \in [a,b], |f(x)| \geq c > 0$

-4 اذا كانت f , g دلتين كلا منهما ذات تغير محدود على المجال $[a,b]$ فإن:

a) $f+g$ د , ت, م على $[a,b]$

b) $f-g$ د , ت, م على $[a,b]$

c) $f.g$ د , ت, م على $[a,b]$

d) $\frac{f}{g}$ د , ت, م على $[a,b]$ بشرط $|g(x)| \geq c > 0 \quad , \quad \forall x \in [a,b]$

5- لتكن f دالة ذات تغير محدود معرفة على المجال $[a,b]$ و كانت $a<c<b$ فإن الشرط الازم و الكافي كي تكون f دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ هو أن تكون f دالة ذات تغير محدود على $[a,c]\ \ and\ \ [c,b]$

و تتحقق العلاقة $\mathrm{V}_a^b f = \mathrm{V}_a^c f + \mathrm{V}_c^b f$

نتائج

اذا كانت f دالة ذات تغير محدود فإن:

a) f^n دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ حيث $n \in \mathbb{N}$

b) $1/f^n$ دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ حيث $n \in \mathbb{N}$ بشرط أن $\forall x \in [a,b]\ , |f(x)| \geq c > 0$

c) $\mathrm{V}_a^b f = \mathrm{V}_a^{c_1} f + \mathrm{V}_{c_1}^{c_2} f + \cdots + \mathrm{V}_{c_n}^b f$ حيث $c_i \in]a,b[:\ i = 1,2,3,\dots,n$

معايير الدوال ذات التغير المحدود

1- اذا كانت f دالة معرفة و مطردة على $[a,b]$ فإنها دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ و تتحقق العلاقة $\mathrm{V}_a^b f = |f(b) - f(a)|$

2- اذا كانت f دالة معرفة على المجال المغلق $[a,b]$ فإن الشرط الزام و الكافي لتكون f دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ هو أن تكتب على شكل فرق لدالتين متزايدتين أي:

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x) : \forall x \in [a,b]$$

حيث f_1, f_2 دالتين متزايدتين على $[a,b]$

3- اذا كانت f دالة معرفة على $[a,b]$ و تحقق شرط ليبشتز(من الدرجة الأولى) الذي ينص على

$$\exists\, L > 0 : |f(u) - f(v)| < L|u - v| : \forall u, v \in [a,b]$$

فإن f دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$

4- اذا كانت f قابلة للاشتقاق على المجال المغلق $[a,b]$ و المشتق موجود و محدود فإن f دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$

4^+- اذا كانت f قابلة للاشتاق على المجال المغلق $[a,b]$ و ربما باستثناء عدد منته من النقاط و كانت

$$\int_a^b |f'(x)|\ dx$$

موجوداً و محدوداً فإن f دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ و تحقق:

$$\bigvee_a^b f = \int_a^b |f'(x)|\ dx$$

5- اذا كانت f دالة مستمرة على المجال $[a,b]$ فإن التغير الكلي $\mathrm{V}_a^b f = \lim_{\Delta p\to 0} V(f,p)$

حيث Δp: نظيم p و هو أكبر فرق يسعى الى الصفر أي أن كل الأبعاد تسعى للصفر

تمارين

1- بين مع الرسم أن الدالة f دالة ذات تغير محدود حيث $f(x) = x - x^2$ على المجال $[0,1]$

ثم أوجد $\mathrm{V}_0^5 f$

الحل:

$$f(x) = x - x^2$$

نلاحظ أن $f_1(x) = x$ متزايدة على المجال $[0,1]$ حيث $f_1{}'(x) = 1 \geq 0$

نلاحظ أن $f_2(x) = x^2$ متزايدة على المجال $[0,1]$ حيث $f_2'(x) = 2x \geq 0$

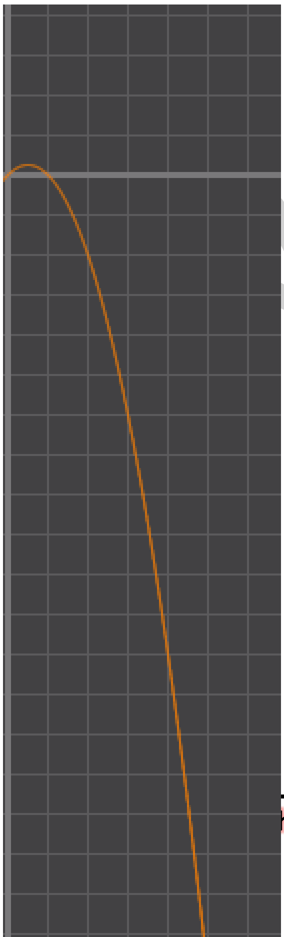
حيث $x \in [0,1]$

ومنه f فرق لدالتين متزايدتين على $[0,1]$ فهي دالة ذات تغير محدود على $[0,1]$

((أو يمكننا القول $f_1(x)$ دالة معرفة و مطردة على المجال $[0,1]$ و منه فإنها دالة ذات تغير محدود

و $f_2(x)$ دالة معرفة و مطردة علة المجال $[0,1]$ فهي دالة ذات تغير محدود و بما أن طرح دالتين ذات تغير محدود هو دالة ذات تغير محدود فإن $f(x) = f_1(x) -$ $f_2(x)$ دالة ذات تغير محدود))

و الأن ندرس إطراد الدالة لتسهيل رسمها ثم نأخذ نقاط مساعدة



$$f(x) = x - x^2 \to f'(x) = y' = 1 - 2x$$

و بأخذ $y' = 0$ و منه $x = \frac{1}{2}$

و بتعويض $x = \frac{1}{2}$ في $f(x)$ نجد أن $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

و لنأخذ $x = 5$ نجد أن $f(5) = 5 - 25 = -20$

و عندما $x=0$ نجد أن $f(0)=1$ and 0

و لحساب $V_0^5 f$

x	0	1/2	5
y'	++++++++++++++++++	0	----------------------------
y	0	1/4	-20

$$\bigvee_0^5 f = \bigvee_0^{\frac{1}{2}} f + \bigvee_{\frac{1}{2}}^5 f$$

$$= \left|f\left(\tfrac{1}{2}\right) - f(0)\right| + \left|f(5) - f\left(\tfrac{1}{2}\right)\right| = 20{,}5 = 41/2 < \infty.$$

و منه f دالة ذات تغير محدود على $[0,5]$

-2 بين أن الدالة $f(x)=x^2-\frac{1}{x+1}$ دالة ذات تغير محدود على المجال $[0,1]$ ثم أوجد $V_0^1 f$

الحل:

نلاحظ أن $f'(x)=2x+\frac{1}{(x+1)^2}$ و أن المشتق f' موجود و محدود على المجال $[0,1]$
حيث $x\in[0,1]$ و منه فإن f دالة ذات تغير محدود على $[0,1]$

أو بطريقة ثانية:

نلاحظ أن $f_1(x)=x$ دالة معرفة و مطردة على $[0,1]$ و منه فإن f_1 دالة ذات تغير محدود
نلاحظ أن $f_2(x)=\frac{1}{x+1}$ و دالة معرفة و مطردة على المجال $[0,1]$ و منه فإن f_2 دالة ذات تغير محدود و تحقق شرط أن $|f_2(x)|>0$
و منه فرق دالتين ذات تغير محدود هو دالة ذات تغير محدود أي أن f دالة ذات تغير محدود

طريقة ثالثة:

$$f'(x)=2x+\frac{1}{(x+1)^2}>0 \quad \forall x\in[0,1]$$

وبالتالي f دالة متزايدة على المجال$[0,1]$ فهي دالة ذات تغير محدود على المجال $[0,1]$

$$\bigvee_0^1 f = |f(1)-f(0)| = \left|\frac{1}{2}-(-1)\right| = \frac{3}{2}$$

-3 اذا كانت f معرفة على $[2,+\infty[$ حيث $f(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$ أوجد

$$\bigvee_{2}^{+\infty} f$$

هل f دالة ذات تغير محدود على $[2,+\infty[$

الحل:

$$f(x)=\frac{1}{(x+1)^2} \quad , \quad x\in[2,+\infty[$$

$$f'(x)=-\frac{2(x+1)}{(x+1)^4}\le 0$$

إن f دالة معرفة و متناقصة على المجال $[2,+\infty[$ و منه فإن f دالة ذات تغير محدود على $[2,+\infty[$

$$\bigvee_{2}^{+\infty} f=\lim_{b\to\infty}\bigvee_{2}^{b} f=\lim_{b\to\infty}|f(b)-f(2)|$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left|\frac{1}{(b+1)^2}-\frac{1}{9}\right|=\frac{1}{9}<\infty$$

-4 f معرفة على المجال $[0,1]$ حيث :

$$f(x)\begin{cases} x^2\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & , \quad x\neq 0\\ 0 \quad , & x=0\end{cases}$$

المطلوب: بين أن f مستمرة على $[0,1]$

بين أن f دالة ذات تغير محدود على المجال $[0,1]$ (باستخدام المشتق)

-5 اذا كانت f دالة معرفة على $[0,\frac{1}{2}]$بالشكل التالي:

$$f(x)\begin{cases} -\frac{1}{\ln(x)} & , \quad x\neq 0\\ 0 \quad , & x=0\end{cases}$$

المطلوب:

1. بين أن f مستمرة على $[0\,,\frac{1}{2}]$
2. بين أن f متزايدة على $[0\,,\frac{1}{2}]$
3. بين أن f دالة ذات تغير محدود على $[0\,,\frac{1}{2}]$
4. بين أن f لا يحقق شرط ليبشتز

6- اذ كانت f معطاة بالشكل التالي:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \le x < 1 \\ 5 & x = 1 \\ x+3 & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

أوجد $V_0^2 f$ (H.W) مع الرسم

سنورد حل الوظائف في المحاضرة القادمة.

انتهت المحاضرة

إعداد: صفا الأيوبي*ياسين الحلبي*شهد الحايك البوشي

to improve our mathematics

#ساعد غيرك