نظري

◄ دكتور المادة: هدى شماط

◄ المحاضرة: الأولى

عنوان المحاضرة: الفضاءات

سنتناول في هذا المقرر البحوث التالية :

١ـ مقدمة طبولوجية في الفضاءات الحقيقية المألوفة $\mathbb{R}^n$ سنتناول فيه (النهايات-الاستمرار-الدوال الحقيقية على $\mathbb{R}^n$)

٢ـ البحث الثاني :التفاضلات و المشتقات للدوال الحقيقية على $\mathbb{R}^n$

٣ـ البحث الثالث: تطبيقات الحساب التفاضلي للدوال الحقيقية على $\mathbb{R}^n$

لنبدأ الأن ^_^

مقدمة في الفضاءات $\mathbb{R}^n$:

◄تعريف الفضاء المتجهي الخطي :

ليكن V مجموعة غير خالية ولنعرف عليها عملية داخلية تسمى الجمع وعملية خارجية تسمى الضرب بعدد حقيقي :

ونقول عن v انه فضاء متجهي اذا تحققت الشروط التالية :

بالنسبة للجمع :

$$+: V \times V \to V$$
$$(x, y) \longmapsto x + y \in V$$

$$1) \forall x, y \in V\ ; x + y = y + x$$

$$2) \forall x, y \in V\ ; x + y \in V$$

$$3) \forall x, y, z \in V\ ; (x + y) + z = x + (y + z)$$

$$4) \forall x \in V : \exists \underbrace{0_V}_{\text{الفضاء صفر}} \in V : x + 0_v = 0_v + x = x$$

$$5)\quad \forall x\in V\ \ \exists \underbrace{-x}_{\text{النظير}}\in V \qquad x+(-x)=(-x)+x=O_V$$

إذا تحققت الشروط (1-2-3-4) تعطي $(v,+)$ زمرة تبديلية .

بالنسبة للضرب

$$(.)\ :\mathbb{R}\times V\to V$$
$$(\alpha,x)\mapsto \alpha.x\in V$$

$$1)\quad \forall x,y\in V\quad \forall\propto\in R \qquad \propto(x+y)=\propto x+\propto y$$

$$2)\qquad \forall x\in V \qquad \forall\propto,\beta\in R\quad :\qquad (\propto+\beta)x=\propto x+\beta x$$

$$3)\qquad \forall\, x\in V \qquad \forall\propto,\beta\in R\ :\ (\propto\beta)x=\propto(\beta,x)$$

$$4)\qquad \forall\, x\in V \qquad ,\exists\, 1_R \qquad ,\quad 1_R\,.\,x=x$$

ملاحظة :

يجب الانتباه أن الضرب عملية من اليسار أي لانكتب $x.1$ لان العدد من R و X من الفضاء.

اذا تحققت جميع الشروط السابقة (جمع وضرب) عندئذ يكون (.,+,V)*فضاء متجهي*

الفضاء الإقليدي المألوف$\mathbb{R}^n$:

لتكن $\mathbb{R}$ فضاء حقيقي ولنأخذ الجداء الديكارتي للمجموعة $\mathbb{R}$ في نفسها n مرة اي:

$$\mathbb{R}^n=\underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\dots\dots\dots\dots.\times\mathbb{R}}_{n\ \text{مرة}}$$

ولنزود $\mathbb{R}^n$ بعمليتي الجمع (+) داخلية والضرب بعدد (.) خارجية بحيث:

$$\forall x,y\in\mathbb{R}^n,\forall\alpha\in\mathbb{R}$$

بحيث:

$$x=(x_1,x_2,\dots\dots\dots,x_n)\ ,\qquad y=(y_1,y_2,\dots\dots\dots.,y_n)$$

فإن:

$$1)\ x+y=(x_1,x_2,\dots\dots\dots,x_n)+(y_1,y_2,\dots\dots\dots,y_n)$$
$$=(x_1+y_1,x_2+y_2,\dots\dots\dots,x_n+y_n)$$
$$2)\ \alpha x=\alpha(x_1,x_2,\dots\dots.,x_n)=(\alpha x_1,\alpha x_2,\dots\dots..,\alpha x_n)$$

وندعو $(\mathbb{R}^n,+,.)$ فضاء شعاعي (متجهي).

تنويه : في المتحان لا يطلب برهان الشروط ^_^

مثال:

لتكن $V = C[a,b]$ مجموعة دوال حقيقية المعرفة و المستمرة على [a,b] و لنعرف عملتي مجموع دالتين و ضرب دالة بعدد حقيقي:

ليكن $f,g \in C[a,b]$ و $\alpha \in R$:

$$1)\ \forall \underbrace{f,g}_{\text{توابع}} \in C[a,b]; (f+g)_{(t)} = f(t)+g(t):\ \ t \in C[a,b]$$

$$2) \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall f \in C[a,b]; (\alpha.f)_{(t)} = \alpha.f(t):\ \ t \in C[a,b]$$

أيضاً إن $(C[a,b],+,\ \cdot)$ تشكل فضاء متجهي.

مثال: يوجد لدينا ℓ^∞ هو مجمعة المتتاليات الحقيقية المحدودة $x \in \ell^\infty$ وأن x عبارة عن متتالية عناصرها أعداد حقيقية $x = \{x_i\}_{i=1}$ وتحقق $|x_i| \le c_x$ حيث c_x عدد حقيقي قد يتبع لـِ x ولاكنه لا يتبع لـِ i ووضعنا القيمة المطلقة لأنها محدودة .

لنأخذ $\left\{\frac{1}{i}\right\}$ عدد عناصرها $\cdots\ 1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots$ هي متتالية عناصرها أعداد حقيقية وكل عناصرها أصغر أو تساوي الواحد أي $\left|\frac{1}{i}\right| \le 1$ ولنعرف على ℓ^∞ عمليتا الجمع والضرب.

$$1) x,y \in \ell^\infty; \{x_i+y_i\}_{i=1}^{\infty} = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} + \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$$

$$2) \forall \alpha \in \mathbb{R}, x \in \ell^\infty\ ; \alpha.\{x_i\}_{i=1}^{\infty} = \{\alpha.x_i\}_{i=1}^{\infty}$$

وبالتالي فإن $(\ell^\infty,+,\ \cdot)$ تشكل فضاء متجهي.

ملاحظة : لقد نوهت الدكتورة انه لا يطلب في الامتحان إثبات ما مضى ذكره بانه فضاء متجهي .

ويأتي السؤال اثبات انها دالة نظيم. وحتا تكون الدالة نظيم يجب أن تحقق شروط الفضاء المتجهي .

و هذا ما سنتناوله في المحاضرة القادمة ^^

انتهت المحاضرة

إعداد: كمال الرفاعي_محمد أنس القزاز_سارة شهاب