نظري

◄ دكتور المادة: أحمد هايل

◄ المحاضرة: الثالثة

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـتمارين عن المجموعة المحدودة والمفتوحة وتابع المسافة

سنورد حل المثال الثاني في المحاضرة السابقة

مثال(١): في $R^2 = X$ برهن أن

$$(x_n, y_n) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} (x, y) \Leftrightarrow x_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} x \,, y_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} y$$

في (R^2, d) في $(R, |.|)$ في $(R^2, |.|)$

الحل :

$(\Leftarrow)$ لدينا $x_n \rightarrow x \,, y_n \rightarrow y$

$$x_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} x \Rightarrow \exists n_1 \in N^* : n \geq n_1 \Rightarrow |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

$$y_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} y \Rightarrow \exists n_2 \in N^* : n \geq n_2 \Rightarrow |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

$$(x_n - x)^2 < \frac{\varepsilon^2}{2} \,, (y_n - y)^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}$$

بالجمع $(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2 < \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2} < \varepsilon^2$

$$\Rightarrow d^2\big((x_n, y_n), (x, y)\big) < \varepsilon^2 \Rightarrow d\,\big((x_n, y_n), (x, y)\big) < \varepsilon$$

ولما كان $n \geq n_1$ و $n \geq n_2$ وجدنا أن $n_0 = max\{n_1, n_2\}$ بحيث إذا كان $n \geq n_0$ فإن

$$(x_n, y_n) \rightarrow (x, y) \Leftarrow d\,\big((x_n, y_n), (x, y)\big) < \varepsilon$$

$(\Rightarrow)$ لدينا $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$ وبالتالي :

$$\forall\varepsilon>0\,;\,\exists n_0\in N^*:d\left((x_n,y_n),(x,y)\right)<\varepsilon\ \Rightarrow\sqrt{|x_n-x|^2+\ |y_n-y|^2}<\varepsilon$$

بالاعتماد على المتراجحة : $0\le\alpha,\beta$: $\beta\le\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, $\alpha\le\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$

$$\Rightarrow|x_n-x|\le\sqrt{|x_n-x|^2+\ |y_n-y|^2}<\varepsilon$$

$$|x_n-x|<\varepsilon\Rightarrow\ \forall\varepsilon>0\,;\,\exists n_0\in N^*:n\ge n_0\ \ \Rightarrow|x_n-x|<\varepsilon\ \Rightarrow x_n\to x$$

وبنفس الطريقة نجد أن $y_n\to y$

مثال(٢): هل المجموعة $]-1,5[$ مفتوحة في الفضاء $(\mathbb{R},|\,.\,|)$ ؟

الحل :

ليكن $a\in]-1,5[$ $\Leftarrow\exists\ \varepsilon=min\{5-a,a+1\}$ ولتكون المجموعة $]-1,5[$ مفتوحة يجب إثبات أن $N(a,\varepsilon)\ \subseteq]-1,5[$ لتكن $x\in N(a,\varepsilon)$ فإن:

$$d(x,a)=|x-a|<\varepsilon=min\{5-a,a+1\}$$

$$|x-a|<5-a\Rightarrow\ -(5-a)<x-a<5-a$$

$$|x-a|<a+1\Rightarrow\ -(a+1)<x-a<a+1$$

$$\Rightarrow x<5\ \text{و}\ -1<x\ \ \Rightarrow-1<x<5\Rightarrow x\in]-1,5[\Rightarrow N(a,\varepsilon)\ \subseteq]-1,5[$$

إذا المجموعة $]-1,5[$ مفتوحة في الفضاء $(\mathbb{R},|\,.\,|)$ حسب تعريف المجموعة المفتوحة

<u>ونلاحظ بشكل مماثل أن أي مجال مفتوح $]a,b[$ في R هو مجموعة مفتوحة</u>

مثال(٣): ليكن (X,d) فضاء متري ولتكن $A,B\subseteq X$ إذا كانت A,B مجموعتان محدودتان ، أثبت أن $A\cup B$ مجموعة محدودة :

الحل :

حسب تعريف المجموعة المحدودة تكون المجموعة محدودة إذا أمكن إيجاد كرة مفتوحة تحويها

A محدودة أي $A\subseteq N(a_1,r_1)$ حيث $a_1\in X,r_1>0\,,r\in R$

B محدودة أي $B\subseteq N(a_2,r_2)$ حيث $a_2\in X,r_2>0\,,r\in R$

ولإثبات أن $A\cup B$ مجموعة محدودة يجب إيجاد كرة مفتوحة تحويها أي تحوي $A\cup B$

لنبرهن أن $A \cup B \subseteq N(a_1, r)$

ليكن $x \in A \cup B \;,\; r = r_1 + d(a_1, a_2) + r_2$

إما $x \in A \Rightarrow x \in N(a_1, r_1) \Rightarrow d(x, a_1) < r_1 < r \Longrightarrow d(x, a_1) < r$

$$\Longrightarrow x \in N(a_1, r)$$

أو $x \in B \Longrightarrow x \in N(a_2, r_2) \Longrightarrow d(x, a_2) < r_2$

حسب متراجحة المثلث $\Longrightarrow d(x, a_1) \leq d(x, a_2) + d(a_2, a_1)$

$$< r_2 + d(a_2, a_1) + r_1 = r \Longrightarrow d(x, a_1) < r \Longrightarrow x \in N(a_1, r)$$

إذا $A \cup B$ محدودة مجموعة $\Longrightarrow A \cup B \subseteq N(a_1, r)$

تمرين: ليكن (X, δ) فضاء متري متقطع بين أن كل مجموعة $U \subseteq X$ مفتوحة في (X, δ)

الحل :

لتكن $U \subseteq X$ وليكن $a \in U$ فإنه $\exists\, \varepsilon = \frac{1}{2} < 1;\; N\left(a, \frac{1}{2}\right) \subseteq U$

$$N\left(a, \frac{1}{2}\right) = \left\{x \in X : \delta(x, a) < \frac{1}{2}\right\} = \{x \in X : \delta(x, a) = 0\}$$

$$= \{x \in X : x = a\} = \{a\} \subseteq \mathrm{U}$$

إذا U مفتوحة في X

تمرين : إذا كان (X, d) فضاء متري و d مسافة فرضا أثبت أن $D = \frac{d}{1+d}$ مسافة على نفس الفضاء

الحل :

المطلوب إثبات أن $D(x, y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$: $D : X \times X \to \mathbb{R}$ مسافة على X

الشرط الأول : لتكن D مسافة يجب أن تحقق الشروط $\forall\, x, y, z \in X$ لأن d تابع مسافة و

$d(x, y) \geq 0$ و بالتالي $\mathrm{D}(x, y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \geq 0$

الشرط الثاني : $x = y \underset{d \text{ تابع مسافة}}{\Leftrightarrow} d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = 0 \Leftrightarrow D(x, y) = 0$

الشرط الثالث (التناظر) : $d(x,y) = d(y,x) \rightarrow$ لأن $D(x,y) = D(y,x)$

الشرط الرابع (متراجحة المثلث) : لنثبت أن $D(x,z) \leq D(x,y) + D(y,z)$

$$\frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} \leq \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} + \frac{d(y,z)}{1+d(y,z)}$$

لدينا d المسافة فرضا $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ ولدينا من الواضح :

$$1 + d(x,y) \leq 1 + d(x,y) + d(y,z) \ldots \ldots (1)$$

$$1 + d(y,z) \leq 1 + d(x,y) + d(y,z) \ldots \ldots (2)$$

نأخذ مقلوب (١) $\frac{1}{1+d(x,y)+d(y,z)} \geq \frac{1}{1+d(x,y)} \ldots \ldots$ (٣)

مقلوب (٢) $\frac{1}{1+d(x,y)+d(y,z)} \geq \frac{1}{1+d(y,z)} \ldots \ldots \ldots$ (٤)

نضرب المعادلة (٣) ب $d(x,y)$ و المعادلة (٤) ب $d(y,z)$

$$\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \geq \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)+d(y,z)}, \frac{d(y,z)}{1+d(y,z)} \geq \frac{d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)}$$

بجمع المعادلتين الأخيرتين $\Longrightarrow \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} + \frac{d(y,z)}{1+d(y,z)} \geq \frac{d(x,y)+d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)}$

إذا كان $\frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} \leq \frac{d(x,y)+d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)} \ldots\ldots (*)$

صحيحة فإن * صحيحة ونتأكد بضرب الطرفين بالوسطين فينتج $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ وهي صحيحة لأنها متراجحة المثلث التي تحققها دالة المسافة d و بالتالي $(*)$ محققة و $D(x,z) \leq D(x,y) + D(y,z)$ ومنه D مسافة

انتهت المحاضرة

إعداد: ناريمان جلو - هديل سعيد - هالة مصطفى