نظري

◀ دكتورة المادة: ريم الحاج خليفة

◀ المحاضرة: التاسعة ◀ عنوان المحاضرة : حلقة الخارج

**المحتوى العلمي** : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـتعريف حلقة الخارج .
٢ـمبرهنة شاملة ع خارج الحلقة .

## حلقة الخارج

**تعريفها:** لتكن $\mathcal{R}$ حلقة وليكن $A$ مثالياً في $\mathcal{R}$ عندئذٍ بما أن $\mathcal{R}$ تشكل زمرة تبديلية بالنسبة لعملية الجمع فإن $A$ تشكل زمرة جزئية في $\mathcal{R}$ ونحصل على زمرة الخارج المعرفة بالشكل التالي :

$$\mathcal{R}\backslash A = \{r + A : r \in \mathcal{R}\}$$

حيث أن عناصر زمرة الخارج $\mathcal{R}\backslash A$ تسمى مرافقات يسارية (يمينية) للزمرة الجزئية $A$ في $\mathcal{R}$ .

**مبرهنة:** ليكن $\mathcal{R}$ حلقة واحدية وَ $A$ مثالياً في $\mathcal{R}$ ولنأخذ المجموعة المعرفة بالشكل :

$$\mathcal{R}\backslash A = \overline{\mathcal{R}} = \{\overline{r} = r + A \quad : \quad r \in \mathcal{R}\}$$

والمعرف عليها عمليتي الجمع $(+)$ والضرب $(.)$ بالشكل الآتي :

$$\forall\, \overline{x} = x + A \quad , \quad \overline{y} = y + A \in \overline{\mathcal{R}}$$

$$\overline{x} + \overline{y} = (x + A) + (y + A) = (x + y) + A = \overline{x + y}$$

$$\overline{x}.\overline{y} = (x + A).(y + A) = (xy) + A = \overline{x.y}$$

**عندئذٍ :**

١- العمليتين $(+)$ و $(.)$ داخلية (ثنائية ) في $\overline{\mathcal{R}}$ .



Syria Math Team

٢- كلاً من العمليتين $(+)$ و $(.)$ كلتاهما معرفة جيداً في $\overline{\mathcal{R}}$ .

٣- العملية $(+)$ تبديلية وتجميعية على المجموعة $\overline{\mathcal{R}}$ .

٤- المجموعة $\overline{\mathcal{R}}$ تحوي عنصراً محايداً بالنسبة للجمع هو $\overline{0} = 0 + A = A$

٥- لكل عنصر $\overline{x} = x + A \in \overline{\mathcal{R}}$ يوجد نظير للجمع هو $-\overline{x} = (-x) + A \in \overline{\mathcal{R}}$

٦- الثنائية $(\overline{\mathcal{R}}, +)$ زمرة تبديلية .

٧- يوجد في $\overline{\mathcal{R}}$ عنصر محايد للضرب هو $\overline{1} = 1 + A \in \overline{\mathcal{R}}$

٨- عملية الضرب $(.)$ تجميعية في $\overline{\mathcal{R}}$ .

٩- عملية الضرب توزيعية على الجمع من اليمين و اليسار .

١٠- الثلاثية $(\overline{\mathcal{R}}, +, .)$ حلقة واحدية .

## البرهان

١- واضح من خلال التعريف أن عمليتي $(+)$ و $(.)$ هي عملية داخلية (ثنائية) على $\overline{\mathcal{R}}$ .

٢- ليكن $\overline{x}, \overline{y}, \overline{x_1}, \overline{y_1} \in \overline{\mathcal{R}}$ بحيث تحقق : $\overline{x_1} = \overline{y_1}$ , $\overline{x} = \overline{y}$

بما أن $\overline{x} = \overline{y}$ عندئذٍ $x + A = y + A$ نضيف للطرفين المقدار $(-y + A)$

$$(x + A) + (-y + A) = (y + A) + (-y + A) = (y - y) + A = 0 + A = A$$
$$\Rightarrow (x - y) + A = A$$

أي أن $x - y \in A$ وبالتالي يوجد $a \in A$ يحقق العلاقة $a = x - y \Leftarrow \boxed{x = a + y}$

وبشكل مشابه أيضاً نلاحظ أنه يوجد $b \in A$ يحقق العلاقة $b = x_1 - y_1 \Leftarrow \boxed{x_1 = y_1 + b}$

- **لنبرهن على عملية الجمع أنها معرفة جيداً .**

لكي نثبت بأن عملية الجمع معرفة جيداً يجب أن نبرهن على أن : $\boxed{\overline{x} + \overline{x_1} = \overline{y} + \overline{y_1}}$ .

$$\overline{x} + \overline{x_1} = (x + A) + (x_1 + A) = (x + x_1) + A = \underbrace{(y + a + y_1 + b)}_{\text{عوضنا}} + A$$

**<u>سنجمع الحدود أولاً ثم سنجمعها حسب عملية الجمع المعرفة بالمبرهنة</u>**

$$= [(y + y_1) + (a + b)] + A = [(y + y_1) + A] + [\underbrace{(a + b) + A}_{\in A}]$$

**<u>بما أن هذا المقدار ينتمي إلى $A$ فإننا نستطيع جعلها كلها تساوي $A$ .</u>**

$$= [(y + A) + (y_1 + A)] + A = (y + A) + (y_1 + A) = \overline{y} + \overline{y_1}$$

**$\Leftarrow$ عملية الجمع $(+)$ معرفة جيداً**

- **لنبرهن على عملية الضرب أنها معرفة جيداً .**

لكي نثبت بأن عملية الضرب معرفة جيداً يجب أن نبرهن على أن : $\boxed{\overline{x}.\overline{x_1} = \overline{y}.\overline{y_1}}$ .

$$\overline{x}.\overline{x_1} = (x+A).(x_1+A) = (x.x_1)+A = [(y+a).(y_1+b)]+A$$
$$= [(y.y_1+yb+ay_1+ab)]+A = (yy_1+A)+\left[\underbrace{(yb+ay_1+ab)}_{\in A}+A\right]$$
$$= (yy_1+A)+A = yy_1+A = (y+A)(y_1+A) = \overline{y}.\overline{y_1}$$

**$\Leftarrow$ عملية الضرب $(.)$ معرفة جيداً .**

**٣-** ليكن $\overline{x},\overline{y} \in \overline{\mathcal{R}}$ بحيث $\overline{x} = x+A$ , $\overline{y} = y+A$ لنبرهن على أن الجمع تبديلي

$$\overline{x}+\overline{y} = \overline{y}+\overline{x}$$
$$\overline{x}+\overline{y} = (x+A)+(y+A) = (x+y)+A = \underbrace{(y+x)}_{\text{لأن } \mathcal{R} \text{ مع الجمع تبديلية}}+A$$
$$= (y+A)+(x+A) = \overline{y}+\overline{x}$$

**$\Leftarrow$ عملية الجمع $(+)$ تبديلية .**

**لنبرهن أنها تجميعية ,** ليكن $\overline{z} = z+A \in \overline{\mathcal{R}}$

$$(\overline{x}+\overline{y})+\overline{z} = [(x+A)+(y+A)]+(z+A) = [(x+y)+z]+A$$
$$= [x+(y+z)]+A$$
$$= (x+A)+[(y+z)]+A] = (x+A)+[(y+A)+(z+A)]$$
$$= \overline{x}+[\overline{y}+\overline{z}]$$

**$\Leftarrow$ عملية الجمع $(+)$ تجميعية .**

**٤-** إن $\overline{0} = 0+A \in \overline{\mathcal{R}}$ فإن $\forall\, \overline{x} = x+A \in \overline{\mathcal{R}}$ فيكون

$$\overline{x}+\overline{0} = (x+A)+(0+A) = (x+0)+A = (x+A) = \overline{x}$$
$$\overline{0}+\overline{x} = (0+A)+(x+A) = (0+x)+A = (x+A) = \overline{x}$$

**$\Leftarrow$ $0$ محايد بالنسبة لعملية الجمع .**

**٥-** ليكن $\overline{x} = x+A \in \overline{\mathcal{R}}$ ولما كان $x \in \mathcal{R}$

فإن $-x \in \mathcal{R}$ : $x + (-x) = 0$ ومنه $-\overline{x} = (-x) + A$

$$\Longrightarrow \overline{x} + (-\overline{x}) = (x + A) + (-x + A) = (x - x) + A = 0 + A = \overline{0}$$

$$\Longrightarrow (-\overline{x}) + \overline{x} = (-x + A) + (x + A) = (-x + x) + A = 0 + A = \overline{0}$$

**$\Leftarrow$ يوجد في $\overline{\mathcal{R}}$ عنصر نظير .**

٦- ومنه $\overline{\mathcal{R}}$ زمرة تبديلية بالنسبة للجمع $(+)$.

**وفي المحاضرة القادمة إن شاء الله تتمة البرهان .**

**الأحلام حقيقة أيها الأصدقاء.. الفشل في تحقيقها هو الشيء الوحيد الزائف..W**

**انتهت المحاضرة**

إعداد: هلا همج . لانا شهاب . أحمد أبو التوت

Syria Math Team