◄ دكتور المادة: برلنت مطيط

◄ المحاضرة: السابعة   عنوان المحاضرة: الخطأ الفعلي والنسبي

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1-مثال عن تطبيق للمبرهنة في المحاضرة السابقة لحساب قيمة w_{opt} المثلى

2- طرق العددية المتقاربة من حل جملة من المعادلات الخطية

3- الخطأ الفعلي و الخطأ النسبي

تطبيق المبرهنة لحساب w_{opt} المثلى

مثال : أوجد الاختيار الأمثل لـ ω الموافقة لطريقة $S.O.R$ للمصفوفة:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

الحل :

أن A ثلاثية الأقطار وضوحا، وهي معرفة إيجابيا وذلك لأن :

- متناظرة $A = A^T$
- وتحقق أنه من أجل أيا يكن : $0 \neq x \in M_{3\times1}(R)$ فإن

$$x^T.A.x = (x_1 \quad x_2 \quad x_3)\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x^T.A.x = (x_1 \quad x_2 \quad x_3)\begin{pmatrix} 4x_1 + 3x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 \\ -x_2 + 4x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x^T.A.x = 4x_1^2 + 3x_2x_1 + 3x_2x_1 + 4x_2^2 - x_3x_2 - x_3x_2 + 4x_3^2$$
$$= x_1^2 + 3(x_1 + x_2)^2 + 3x_2^2 + (x_2 + x_3)^2 > 0$$

وذلك بحيث أن $x_1 = x_2 = x_3 \neq 0$.

لنطبق الأن المبرهنة السابقة لإيجاد ω المثلى، أولا نحسب B_J:

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \qquad L+U = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_J = -D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -0.75 & 0 \\ -0.75 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0.25 & 0 \end{pmatrix}$$

لنوجد الأن $\rho(B_J)$، ولأجل ذلك نوجد أولا قيمتها الذاتية

$$\det(B_J - \lambda I) = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{vmatrix} -\lambda & -0.75 & 0 \\ -0.75 & -\lambda & 0.25 \\ 0 & 0.25 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; -\lambda(\lambda^2 - 0.625) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda = 0) \;\; or \;\; \left(\lambda = \pm\sqrt{0.625}\right) \Rightarrow \rho(B_J) = \max_i\{|\lambda_i|\} = \sqrt{0.625}$$

ومنه:

$$\omega_{Opt} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\left(\rho(B_J)\right)^2}} = \frac{2}{1+\sqrt{1-0.625}} = 1.240408206$$

$$\Rightarrow \omega_{Opt} \approx 1.24$$

مثال آخر

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية :

$$4x_1 + 3x_2 = 24$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 = 30$$

$$-x_2 + 4x_3 = -24$$

أوجد الحل العددي لهذه الجملة إذا علمت أن : $x^{(0)} = (1 \;\; 1 \;\; 1)^T$، وذلك باستخدام طريقة غاوس سيدل وطريقة $S.O.R$ علما أن $\omega = 1.25$.

الحل

باستخدام غاوس سيدل: نلاحظ وضوحا أن مصفوفة الأمثال مسيطرة قطريا تماما إن المتتالية التكرارية لهذه الطريقة هي

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 - \displaystyle\sum_{j=2}^{n} a_{1j}\,.\,x_j^{(k)}\right) & \text{للحد الأول} \\ x_i^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1}\left(a_{ij}.\,x_j^{(k+1)}\right) - \sum_{j=i+1}^{n}\left(a_{ij}x_j^{(k)}\right)\right) & ; i = 2, \dots, n \end{cases}$$

وبتطبيق هذه العلاقة نجد أن :

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{4}\left(24 - 3x_2^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{4}\left(30 - 3x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{4}\left(-24 + x_2^{(k+1)}\right) \end{cases}$$

ويوضح الجدول التالي التكرارية السبعة الأولى الموافقة لهذه الطريقة :

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$x_1^{(k)}$	1	5.250000	3.1406250	3.0878906	3.0549316	3.0343323	3.0214577	3.0134110
$x_2^{(k)}$	1	3.812500	3.8828125	3.9267578	3.9542236	3.9713898	3.9821186	3.9888241
$x_3^{(k)}$	1	−5.04687	−5.029296	−5.018310	−5.007152	−5.007152	−5.004470	−5.002794

♦ إذا طلب إيجاد الحل بدقة معينة (بتقريب معين) نستخدم الدستور $\dfrac{\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|_\infty}{\|x^{(k)}\|_\infty} \le \alpha$ كشرط توقف .

باستخدام $S.O.R$

لدينا فرضا $\omega = 1.25$، عندئذ نطبق الخوارزمية :

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (1-\omega)x_1^{(k)} + \dfrac{\omega}{a_{11}}\left(b_1 - \displaystyle\sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j^{(k)}\right) & \text{للحد الأول} \\ x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \dfrac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right) & ; i = 2,3, \dots, n \end{cases}$$

وبالتالي :

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -0.25x_1^{(k)} + 1.25\left[\dfrac{1}{4}\left(24 - 3x_2^{(k)}\right)\right] \\ x_2^{(k+1)} = -0.25x_2^{(k)} + 1.25\left[\dfrac{1}{4}\left(30 - 3x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}\right)\right] \\ x_3^{(k+1)} = -0.25x_3^{(k)} + 1.25\left[\dfrac{1}{4}\left(-24 + x_2^{(k+1)}\right)\right] \end{cases}$$

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$x_1^{(k)}$	1	6.312500	2.6223145	3.1333027	2.9570512	3.0037211	2.9963276	3.0000498
$x_2^{(k)}$	1	3.5195313	3.9585266	4.0102646	4.0074838	4.0029250	4.0009262	4.0002586
$x_3^{(k)}$	1	−6.6501465	−4.6004238	−5.0966863	−4.973489	−5.0057135	−4.9982822	−5.0003486

مثال (سؤال دورة)

ليكن لدينا جملة المعادلات الخطية :

$$3x - y = 4$$
$$-x + 3y = -4$$

والمطلوب: **-1** ادرس التقارب بطريقة جاكوبي

-2 أوجد ω_{Opt} في طريقة S.O.R .

الحل :

أولا لدينا مصفوفات التالية :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ومنه نجد أن

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, (L+U) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B_J = D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

نوجد القيم الذاتي لمصفوفة جاكوبي :

$$B_J - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(B_J - \lambda I) = \lambda^2 - \frac{1}{9} = 0 \Rightarrow \lambda = \mp\frac{1}{3} \le 1$$

وكي تكون طريقة جاكوبي متقاربة يجب أن يكون $\rho(B_J) < 1$ حسب مبرهنة سابقة وبما أن :

$$\rho(B_J) = \pm\frac{1}{3} < 1$$

إذن طريقة جاكوبي متقاربة .

من أجل إيجاد قيمة ω_{Opt} نعوض في العلاقة

$$\omega_{Opt} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\left(\rho(B_J)\right)^2}} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\frac{1}{9}}} \approx 1.02944$$

الطرق العددية المتقاربة من حل جملة المعادلات الخطية

بفرض $A = M - N \in M_n(R)$ مصفوفة غير شاذة، إن الطرق العددية المستخدمة لحل جملة المعادلات الخطية $AX = b$ حيث $\det(A) \neq 0$ تتقارب نحو حل الجملة X إذا كانت المتتالية التكرارية $x^{(k)}$ الموافق لهذه الطريقة متقاربة تعرف هذا الحل ، وعندئذ نستطيع أن نكتب :

$$\lim_{k\to\infty} \|x^{(k)} - x\| = 0 \;;\; \text{نظيم ما } \|.\|$$

مبرهنة

الشرط اللازم والكافي لتقارب المتتالية العددية $X^{(k+1)} = B.X^{(k)} + C$ الموافقة للطرائق المستخدمة في حل جملة المعادلات الخطية $AX = b$ حيث $\det(A) \neq 0$ نحو الحل x هو أن يتحقق: $\rho(\mathrm{B}) \leq 1$، حيث $\rho(\mathrm{B})$ هو نصف القطر الطيفي للمصفوفة B.

الخطأ الفعلي و الخطأ النسبي :

لتكن جملة المعادلات الخطية $AX = b$ حيث $\det(A) \neq 0$ ، وبفرض x هو الحل الفعلي لهذه الجملة و $\tilde{x}$ هو الحل التقريبي لهذه الجملة باستخدام إحدى الطرائق العددية السابقة، عندئذ:

يعرف الخطأ الفعلي بالشكل :

$$\|E\| = \|x - \tilde{x}\|$$

يعرف الخطأ النسبي على أنه المقدار:

$$\|R\| = \frac{\|E\|}{\|X\|} \;;\; \text{نظيم ما } \|.\|$$

مبرهنة

إذا كان : $\|B\| \leq 1$ فإن $\lim_{k\to\infty} \|x^{(k)} - x\| = 0$ حيث x الحل الفعلي لجملة المعادلات الخطية $AX = b$.

حيث: $\det(A) \neq 0$ و $x^{(k)}$ متتالية من الحلول التقريبية للجملة $x^{(k)} = Bx^{(k-1)} + C$

الإثبات

بما أن x هو الحل الفعلي للجملة $AX=b$ فإنه يتحقق أن : $(1)\ldots\ldots x=Bx+C$

وبما أن $x^{(k)}$ متتالية من الحلول التقريبية للجملة $AX=b$ فإن : $(2)\ldots\ldots x^{(k)}=Bx^{(k-1)}+C$

بطرح (1) من (2) نجد :

$$x^{(k)}-x=B(x^{(k-1)}-x)$$

بأخذ نظيم الطرفين نجد $\|x^{(k)}-x\|=\|B(x^{(k-1)}-x)\|\le\|B\|\|x^{(k-1)}-x\|$

$$(*)\ldots\ldots\ldots\ldots\|x^{(k)}-x\|\le\|B\|\|x^{(k-1)}-x\|$$

$$0\le\|x^{(k)}-x\|\le\|B\|\underbrace{\|x^{(k-1)}-x\|}_{\le\|B\|\|x^{(k-2)}-x\|\ \text{حسب العلاقة}(*)}\le\|B\|^2\|x^{(k-2)}-x\|\le\cdots$$

$$\le\|B\|^{k-1}\|x^{(1)}-x\|\le\|B\|^{k}\|x^{(0)}-x\|$$

وبما أن $\|B\|<1$ فإن $\lim\limits_{k\to\infty}\|B\|^k=0$ فبالتالي :

$$\lim_{k\to\infty}\|x^{(k)}-x\|=0$$

مبرهنة

بفرض أنه لدينا جملة من المعادلات الخطية $AX=b$ حيث $det(A)\neq 0$، وبفرض x،$\tilde{x}$ الحل الفعلي و التقريبي لهذه الجملة على الترتيب ، عندئذ يتحقق أن :

$$\|R\|\le Cond(A).\frac{\|b-\tilde{b}\|}{\|b\|}$$

حيث $\|.\|$ نظيم مرتب جزئيا للمصفوفة A.

الإثبات

بما أن x،$\tilde{x}$ الحل الفعلي والتقريبي لجملة المعادلات الخطية $AX=b$، فإنه ينتج:

$$\left.\begin{matrix}Ax=b\\ A\tilde{x}=\tilde{b}\end{matrix}\right\}\Rightarrow A(x-\tilde{x})=b-\tilde{b}\Rightarrow x-\tilde{x}=A^{-1}(b-\tilde{b})$$

وبأخذ نظيم الطرفين نجد أن :

$$\|x-\tilde{x}\|=\|A^{-1}(b-\tilde{b})\|\Rightarrow\|x-\tilde{x}\|\le\|A^{-1}\|\|b-\tilde{b}\|\ldots(1)$$

ومن جهة أخرى

$$b = AX \Rightarrow \|b\| = \|AX\| \leq \|A\|.\|x\| \Rightarrow \|x\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\|x\|} \leq \frac{\|A\|}{\|b\|} \ldots \ldots (2)$$

من تعريف الخطأ النسبي ومن العلاقتين (1) و (2) نجد أن:

$$R = \frac{\|E\|}{\|X\|} = \frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|X\|} \leq \underbrace{\|A^{-1}\|.\|A\|}_{cond(A)} . \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|}$$

$$\Rightarrow R \leq cond(A) \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|}$$

يمكننا حساب الخطأ المرتكب بطريقتين :

$$1)\ E \leq \|A^{-1}\|.\|b - \tilde{b}\|$$

$$2) E \leq \left\|B(x^{(k-1)} - x)\right\|$$

في الطريقة الأولى نحسب $\tilde{b}$ من العلاقة $A\tilde{x} = \tilde{b}$

في الطريقة الثانية نحتاج معرفة B فإذا لم تكن معلومة نتجنب هذه الطريقة .

انتهت المحاضرة

إعداد:لبنى الطون-شهناز طاطيش-عبد الرحمن البحش