11+12 -4-2018

نظري

Syria Math

◄ دكتورة المادة: محمد الشيخ

◄ المحاضرة : السادسة و السابعة

◄ عنوان المحاضرة: تابع اللغارتم العقدي

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ تكملة لتابعا الظل والتظل العقديان .

٢ـ تابع اللوغارتم العقدي .

تابعا الظل و التظل

١ـ تابع الظل :

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

- تحليلي على {الأصفار التي تعدم المقام}$\mathbb{C}\backslash$ أي على $\mathbb{C}\backslash\{\frac{\pi}{2} + \pi k \quad : \quad k \in \mathbb{Z}\}$
- هو تابع فردي
- دوري دوره π .

٢ـ تابع التظل :

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

- تحليلي على {الأصفار التي تعدم المقام}$\mathbb{C}\backslash$ أي على $\mathbb{C}\backslash\{\pi k \quad : \quad k \in \mathbb{Z}\}$
- هو تابع فردي
- دوري دوره π .

ملاحظة : حاصل قسمة (جداء) تابعين احداهما فردي والأخر زوجي هو تابع زوجي .

وحاصل قسمة (جداء) تابعين فرديين معاً أو زوجيين معاً هو تابع زوجي .

لنثبت أن $\tan z$ هو تابع دوري دورة π

الحل :

$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{i(e^{iz}+e^{-iz})}=\frac{e^{2iz}-1}{i(e^{2iz}+1)}$$

ولنعوض ب كل z ب $z+\pi$

$$\tan(z+\pi)=\frac{e^{2i(z+\pi)}-1}{i\left(e^{2i(z+\pi)}+1\right)}=\frac{e^{2iz+2\pi i}-1}{i(e^{2iz+2\pi i}+1)}=\frac{e^{2iz}-1}{i(e^{2iz}+1)}=\tan z$$

$$e^{z}=e^{z+2\pi i}$$

–لنثبت أيضاً أن $\cot z$ هو تابع دوري دورة π

الحل :

$$\cot z=\frac{\cos z}{\sin z}=\frac{i\left(e^{2iz}+1\right)}{e^{2iz}-1}$$

بنفس الأسلوب ، لنعوض ب كل z ب $z+\pi$

$$\cot(z+\pi)=\frac{i\left(e^{2i(z+\pi)}+1\right)}{e^{2i(z+\pi)}-1}=\frac{i(e^{2iz}+1)}{e^{2iz}-1}=\cot z$$

تمرين : أوجد الجزئين الحقيقي و التخيلي لـ $\cot z$ و $\tan z$.

الحل :

لنوجد لـ $\tan z$

$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}=\frac{\sin x\ \ ch\, y+i\cos x\ \ sh\, y}{\cos x\ \ ch\, y-i\sin x\ \ sh\, y}$$

نضرب بمرافق المقام

$$=\frac{(\sin x\ \ ch\, y+i\cos x\ \ sh\, y).(\cos x\ \ ch\, y+i\sin x\ \ sh\, y)}{(\cos x\ \ ch\, y-i\sin x\ \ sh\, y).(\cos x\ \ ch\, y+i\sin x\ \ sh\, y)}$$

$$= \frac{(\sin x\ \ ch\, y)(\cos x\ \ ch\, y) + (\sin x\ \ ch\, y)(i\sin x\ \ sh\, y) + (i\cos x\ \ sh\, y)(\cos x\ \ ch\, y) - (\cos x\ \ sh\, y)(\sin x\ \ sh\, y)}{(\cos x\ \ ch\, y)^2 - (\sin x\ \ sh\, y)^2}$$

ومنه و بإخراج i عامل مشترك من الحد الثاني و الثالث من البسط يكون القسم الحقيقي والتخيلي هو:

$$u = \frac{(\sin x\ \ ch\, y)(\cos x\ \ ch\, y) - (\cos x\ \ sh\, y)(\sin x\ \ sh\, y)}{(\cos x\ \ ch\, y)^2 - (\sin x\ \ sh\, y)^2}$$

$$v = \frac{(\sin x\ \ ch\, y)(\sin x\ \ sh\, y) + (\cos x\ \ sh\, y)(\cos x\ \ ch\, y)}{(\cos x\ \ ch\, y)^2 - (\sin x\ \ sh\, y)^2}$$

وبنفس السلوب نوجدهما للتابع $\cot z$.

تمرين : حل المعادلة التالي : $\tan z = i$

الحل :

$$\tan z = i \Leftrightarrow \frac{e^{2iz} - 1}{i(e^{2iz} + 1)} = i \Leftrightarrow e^{2iz} - 1 = -e^{2iz} - 1$$

$$\Leftrightarrow 2e^{2iz} = 0$$

ومنه المعادلة مستحيلة الحل وذلك $\forall z \in \mathbb{C}$

تمرين : حل المعادلة التالي : $\tan z = 2i$.

الحل :

$$\tan z = 2i \Leftrightarrow \frac{e^{2iz} - 1}{i(e^{2iz} + 1)} = 2i \Leftrightarrow e^{2iz} - 1 = -2e^{2iz} - 2$$

$$\Leftrightarrow e^{2iz} = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow e^{-2y+2ix} = \frac{1}{3} e^{i\pi} \Leftrightarrow e^{-2y} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2} ln \frac{1}{3} = \frac{1}{2} ln 3 \quad , \quad 2x = \pi + 2\pi k \quad : \quad k \in \mathbb{Z}$$

وبالتالي حلول المعادلة تعطى بالعلاقة $z_k = x + iy = \frac{\pi}{2} + \pi k + i\frac{1}{2} ln\, 3$

ملاحظة : عند حل معادلة تحوي $\sin z$, $\cos z$, $\tan z$, $\cot z$ نحولها الى معادلة اسية ومن ثم نحل المعادلة الاسية كما تعلمنا .

تابع اللوغارتم العقدي

تعريف : نقول عن عدد عقدي b انه لوغارتم لعدد عقدي غير معدوم a ونكتب $b = \log a$.

إذا وفقط إذا كان : $e^b = a$.

ملاحظة :

- $\log(0)$ غير معرف
- اذا كان $b = \log a$ فإن $k \in \mathbb{Z}$: $b + 2\pi ki = \log(a)$

أي أن لـ Log عدد عقدي غير المعدوم عدد غير منته من القيم و لـ برهان ذلك

$$e^{b+2\pi ki} = e^b = a$$
$$\ln a = b + 2\pi ki : \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

التابع اللوغارتمي : نعرف التابع اللوغارتمي الذي يقرن كل z من $\mathbb{C}^*$ بلوغارتمه أي أن

$$\log : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$$
$$z \to w = Log\, z$$

من الواضح هنا أن هذا التابع متعدد القيم بل أنه لانهائي القيم .

<u>إيجاد القسم الحقيقي و التخيلي لتابع اللوغارتم العقدي :</u>

لنضع $w = Log\, z = u + iv$ عندها :

$$w = \log z \Leftrightarrow e^w = z \Leftrightarrow e^{u+iv} = |z|e^{iArg(z)}$$
$$\Leftrightarrow e^u = |z| \Rightarrow u = \ln|z|$$
$$v = Arg(z) + 2\pi k : \ k \in \mathbb{Z}$$

ولاحظ أنّ دائماً $|z| > 0$ اذاً u موجود

$$\log z = w = u + iv$$
$$\Rightarrow \log z = \ln|z| + i(\,Arg(z) + 2\pi k)$$

هذه القيمة تبين أنّ لـ $\log z$ عدد غير منتهٍ من القيم فكل قيمة لـ k تعطي قيمة لـ $\log z$

كيف نتعامل مع مثل هذا التابع ؟

لو ثبتنا k في المساواة السابقة لحصلنا على تابع وحيد القيمة نرمز له g_k بحيث :

$$g_{k_0} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$$

$$(\$) \qquad g_{k_0}(z) = ln|z| + i\,(Arg(z) + 2\pi k_0)$$

هنا ثبتنا k و أعطيناها القيمة الثابتة k_0 (أي أن k هنا مثبتة)

نسمي مثل هذا التابع بفرع غير تحليلي لتابع اللوغارتيم العقدي log

كما نسمي أي تابع معرف على $\mathbb{C}^*$ بالشكل

$$f_\propto(z) = ln|z| + i(\theta) \ : \ \ \theta = arg\, z \ \in]\propto, \propto + 2\pi]$$

وحيث $\propto \in \mathbb{R}$ ثابت حقيقي كيفي ، نسميه فرعاً غير تحليلي لـ log

ملاحظة : التابع المعاكس لتابع الـ sin على $\mathbb{R}$ هو تابع متعدد القيم او لانهائي القيم ولكن لن نقوم بدراسته في مقررنا هذا و سنكتفي بالتابع Log

هنالك فرق : بين $arcsinx$ و $Arcsinx$ ذلك لأن $arcsinx$ هو تابع من أحد التوابع العكسية لتابع الجيب أما $Arcsinx$ فهو التابع العكسي الرئيسي للجيب و هو المعرف على $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

بالعودة للتوابع $f_\alpha(z)$ نلاحظ أن:

$$f_{-\pi}(z) = g_0(z)$$

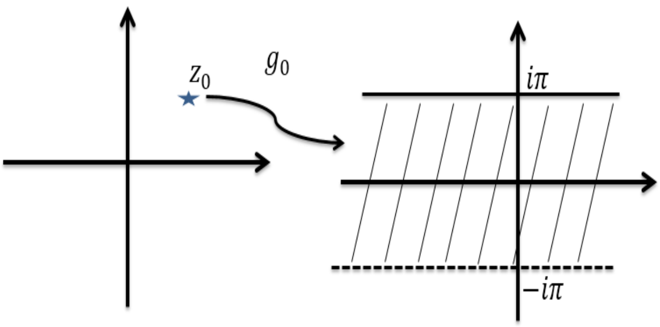
أي أننا لو وضعنا $k = 0$ في العلاقة $(\$)$ عندها نحصل على

$$f_{-\pi}(z) = \ln|z| + i\theta \quad : \ \theta = Arg\, z \ \in]-\pi, +\pi]$$

المستقر الفعلي لـ g_0 : لدينا الفرع الرئيسي بتابع اللوغارتم $g_0(z) = log\, z = ln|z| + i(Argz)$

و نلاحظ أن :

$$\ln|z| \in]-\infty, +\infty[\qquad , \qquad Argz \in]-\pi, \pi]$$



هو الشريط الرئيسي مع حافته العليا و دون حافته السفلى .

تمرين أثبت أن التابع $f_\propto$ غير مستمر عند أي نقطة من $D_\propto$ حيث $D_\propto$ هو نصف المستقيم $arg\, z = \propto$ مع المبدأ حيث

$$D_\propto = \{z \in \mathbb{C} \;\; : \; arg\, z = \propto \;\; \vee \;\; z = 0\}$$

الإثبات

ليكن $z_0 \in D_\alpha$ عندها نميز الحالتين :

١)إذا كان $z = 0$ فإن $f_\propto$ غير مستمر عند z_0 لأن $f_\propto$ غير معرف عندها

٢) $z_0 \neq 0 \Leftarrow z_0 = |z_0|e^{i\alpha}$

$$f_\propto(z_0) = \ln|z_0| + i(\propto + 2\pi)$$

إن التابع f_α معرف بحيث $\theta \in]\alpha, \alpha + 2\pi]$

و بالتالي لو أردنا تصوير عدد عقدي زاويته α

يجب اختيار قياس آخر للزاوية بحيث ينتمي هذه القياس للمجال $]\alpha, \alpha + 2\pi]$ فسنختار لذلك $\alpha + 2\pi$

لنأخذ $z = |z_0|e^{i(\propto+\varepsilon)} \notin D_\propto$

فنلاحظ أنه عندما $\varepsilon \to 0$ فإن $z \to z_0$ و $z \in C(o, |z_0|)$ و أنّ:

$$f_\propto(z) = \ln|z_0| + i(\propto + \varepsilon)$$

$$\lim_{z \to z_0} f_\propto(z) = \ln|z_0| + i(\propto) \neq f_\alpha(z_0)$$

ومنه $f_\propto$ غير مستمر عند z_0

نرمز بـ $C(o, |z_0|)$ للدائرة التي مركزها المبدأ و نصف قطرها $|z_0|$

مبرهنة : لأجل كل $\propto \in \mathbb{R}$ التابع $L_\propto = f_\propto|_{\mathbb{C}\setminus D_\propto}$ (مقصور f_α على $\mathbb{C}\setminus D_\propto$) تحليلي على $\mathbb{C}\setminus D_\propto$ و :

$$L'_\propto(z) = \frac{1}{z} \quad : \quad \forall z \in \mathbb{C}\setminus D_\propto$$

الاثبات :

لنأخذ التابع

$$h_\propto = e^z|_{]-\infty\infty,[\times i]\propto,\propto+2\pi[=\mathbb{R}}$$

(المنطلق هنا عبارة عن شريط افقي عرضه 2π دون الحافتين العليا و السفلى)

إن أي نقطة من هذا الشريط لها صورة وإن $L_\propto$ تابع عكسي ل $h_\propto$ ونعلم أنّ:

$$L'_\propto(z) = \frac{1}{h'_\propto\big(L_\propto(z)\big)} \dots.(*)$$

و لكن :

$$h'_\propto = e^z \Longrightarrow h'_\propto\big(L_\propto(z)\big) = e^{L_\propto(Z)} = z$$

بالتعويض في $(*)$نجد أنّ: $L'_\alpha(z) = \frac{1}{z}$ و هو المطلوب

و لنفسر قليلاً ما سبق :وجدنا في الفقرة السابقة أنّ f_α غير مستمر على المستقيم D_αمع المبدأ و من ثم انتقلنا إلى مبرهنتنا هذه التي تنص أن f_α سيكون تحليلياً عند كل نقطة من المستوي باستثناء المستقيم D_α مع المبدأ (لأنه غير مستمر عليه) ونريد الآن تعين مشتق هذا التابع على المنطقة التي يكون تحليلي عليها أي $\mathbb{C}\backslash D_\propto$ لأجل ذلك سنسمي مقصور التابع f_α على $\mathbb{C}\backslash D_\propto$ب$L_\alpha$ فتؤول مسألتنا للبحث عن L'_α

بدايةً لاحظ ما يلي: في التحليل الحقيقي ، إذا كان $y = y(x)$ تابعاً تقابلاً على $D \subseteq \mathbb{R}$ و كان تابعه العكسي $x = x(y)$ فإن هذين التابعين يحققان العلاقة التالية :

$$\frac{dy}{dx}.\frac{dx}{dy} = 1$$

تبقى هذه الملاحظة صحيحة في مجموعة الأعداد العقدية فإذا كان h_α التابع العكسي لـ L_α كان :

$$\frac{dL_\alpha}{dh_\alpha}.\frac{dh_\alpha}{dL_\alpha} = 1 \Longrightarrow \frac{dL_\alpha}{dh_\alpha} = \frac{1}{\frac{dh_\alpha}{dL_\alpha}} \Longrightarrow \boxed{L'_\alpha(h_\alpha) = \frac{1}{h'_\alpha(L_\alpha)}} \dots\dots(✸)$$

و لما كان $\mathrm{L}_\alpha(z)$ هو مقصور فرع تابع لوغارتمي فإن تابعه العكسي هو $\mathrm{h}_\alpha(z) = e^z$

و بالتالي $\mathrm{h}'_\alpha(z) = e^z$ و عليه يكون

$$\boxed{\mathrm{h}'_\alpha\big(L(z)\big) = e^{L(z)} = z} \dots\dots(✸✸)$$

لأن تركيب التابع مع تابعه العكسي يعطينا z (التطبيق المطابق) ، بتعويض(✸✸)في (✸): نجد :

$$L'_{\alpha}(z) = \frac{1}{z}$$

و بذلك نكون قد وصلنا للبرهان المطلوب بملاحظة أنه إذا كان L_{α} اشتقاقي على منطقة فهو تحليلي عليها

نسمي التابع $L_{\propto+=-\pi+2\pi k}$ لأجل كل عدد صحيح k فرعاً تحليلاً لـ log موافقاً لـ k
والفرع الموافق ل $k = 0$ ، نسميه الفرع الرئيسي ل log نرمز له ب $\boldsymbol{Log}$.

-لنأخذ $k = 0$ فإن $\propto = -\pi$ هو تابع تحليلي إذا عرفناه كما يلي :

$$Log = \mathbb{C} \backslash ox^{-} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$Log\ z = \ln|z| + i\, \underbrace{Arg\ (z)}_{]-\pi,\pi]}$$

أي لو أخذنا القيمة الرئيسية للوغارتم العدد $1 + i$ لكانت $Log(1+i) = \ln(\sqrt{2}) + i\frac{\pi}{4}$

أم لو أخذنا اللوغارتم له وفق اللوغارتم متعدد القيم لكان $log(1+i) = \ln(\sqrt{2}) + i\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)$

ملاحظة : إن اقتطاع نصف المستقيم $D_{\propto}$ من الستوي العقدي يمنع الدوران دورة كاملة حول المبدأ أي يمنع

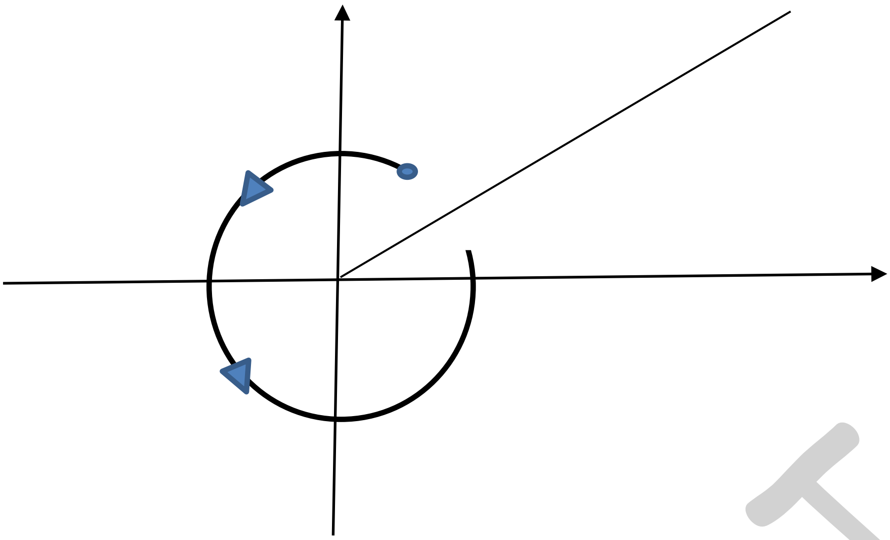
الانطلاق من النقطة $z \in \mathbb{C} \backslash D_{\alpha}$ والعودة لها بدورة كاملة دون الخروج من $\mathbb{C} \backslash D_{\propto}$
حيث أن هذه الدورة لو تمت لحصلنا على قياس جديد لزاوية z مغايرة لتلك المسموح بها في الفرع $L_{\propto}$
لذلك نسمي المبدأ نقطة التفرع للتابع Log ونسمي المستقيم $D_{\propto}$ مستقيم تفرع Log

بل إن اقتطاع أي منحني C بدايته مبدأ الاحداثيات ويذهب الى اللانهاية دون أن يتقطع سيمنع من الانطلاق من النقطة $z \in \mathbb{C} \backslash C$ والعودة اليها بدورة كاملة دون الخروج من $\mathbb{C} \backslash C$ لذلك نسمي المنحني C منحني التفرع .

نتيجة : يكون ل log فرع تحليلي على منقطة G جزئية من $\mathbb{C}$ اذا حققت الخاصة الآتية :

لا يمكن الانطلاق من نقطة z من G والعودة اليها بدورة كاملة حول المبدأ دورن الخروج من G .

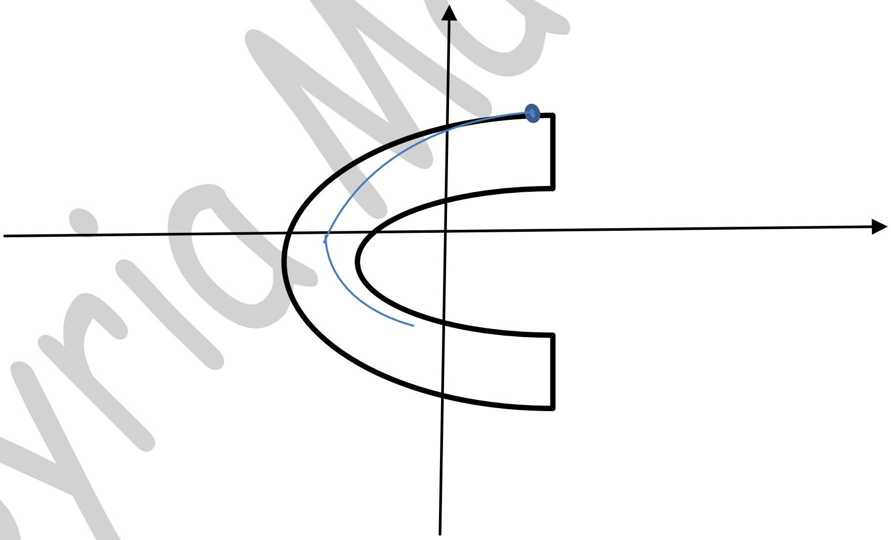
أمثلة : ١-هل يوجد ل log فرعاً تحليلاً على G (وهي هنا كامل المستوي باستثناء D_α)



الحل :

لايوجد أي فرع تحليلي ل log على أي نقطة من G لأنه يمكن الانطلاق من نقطة من G والعودة اليها خلال دورة كاملة دورن الخروج من G .

٢-



يوجد فرع تحليلي بل عدد غير منته من الفروع التحليلية للتابع G لأنه لا يمكن الانطلاق من أي نقطة من هذه المنطقة والعودة اليها بدورة كاملة دون الخروج من المنطقة .

تمرين : لو وجد منقطة لا تقطع على المحور ox^- وهل يوجد فرعاً تحليلاً ؟

الحل :

نعم انه يوجد فرع تحليلي لأنه لا يوجد أي نقطة واحدة على الأقل يمكن الإنطلاق منها والعودة اليها بعد دورة كاملة .

ملاحظة : ان نقاط التفرع لتابع معرف بعلاقة من الشكل

$$f(z) = log\big(g(z)\big)$$

حيث g تابع وحيد القيمة هي اصفار g أي هي حلول المعادلة $g(z) = 0$ ونحصل على فروع تحليلية لـ fعلى أي منطقة تمنع فيها الانطلاق من نقطة منها والدوران حولها دورة كاملة والعودة اليها دون الخروج من تلك المنطقة وأن المشتق لاي فرع ل f على منطقة مثل تلك المناطق يعطى بالمساواة :

$$f'(z) = \frac{g'(z)}{g(z)}$$

انتهت المحاضرة

إعداد: منى شغل – احمد أبو التوت – نذير تيناوي