26-3-2018

نظري

◄ دكتور المادة: نايف الطلي

◄المحاضرة: الخامسة عنوان المحاضرة:خواص دوال ذات التغير المحدود

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1. برهين الخواص لدالة ذات تغير محدود

1- مبرهنة:

اذا كانت f دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ فإنها محدودة على $[a,b]$ و لكن العكس ليس بالضرورة صحيح في الحالة العامة.

البرهان:

من الفرض لدينا أن fدالة ذات تغير محدود ومنه إن $\bigvee_a^b f<\infty$ و المطلوب إثبات f محدودة أي :

$$\exists M>0: |f(x)|\le M: \forall x\in[a,b]$$

الأن لنأخذ التجزئة التالية $P=\{a,x,b\}$ حيث $a<x<b$ إن $V(f,P)\le \bigvee_a^b f$ كون f د,ت,م

$$V(f,P)=|f(x)-f(a)|+|f(b)-f(x)|\le \bigvee_a^b f$$

ومنه $$|f(x)-f(a)|\le \bigvee_a^b f$$

و الأن لنأخذ $$|f(x)|=|f(x)-f(a)+f(a)|\le|f(x)-f(a)|+|f(a)|$$

$$\le \bigvee_a^b f+|f(a)|=M$$

حيث $\bigvee_a^b f+|f(a)|$ عدد حقيق ومنه فإن $\exists M>0 : |f(x)|\le M : \forall x\in[a,b]$

و منه الدالة f دالة محدودة على المجال $[a,b]$

و لإثبات العكس غير صحيح نكتفي بإعطاء مثال معاكس

أي نوجد f دالة محدودة و لكن ليست دالة ذات تغير محدود و قد درسنا في المحاضرة الثالثة دالة f و لكن f ليست دالة ذات تغير محدود (راجع التمرين الثالث من المحاضرة الثالثة) و منه العكس ليس صحيح بالضرورة

2-مبرهنة:

إذا كانت f دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ فإن $|f|$ دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ و لكن العكس ليس صحيح بالضرورة

البرهان:

من الفرض لدينا f دالة ذات تغير محدود و منه إن $\mathrm{V}_a^b f < \infty$ و لنثبت أن $\mathrm{V}_a^b |f| < \infty$

لنأخذ التجزئة $P \in \mathbb{P}[a,b]$ حيث $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ وليكن

$$V(|f|,P) = \sum_{k=1}^{n} \big|\,|f(x_k)| - |f(x_{k-1})|\,\big|$$

و نعلم أن $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$

و منه فإن $\sum_{k=1}^{n} \big||f(x_k)| - |f(x_{k-1})|\big| \leq \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$

و منه $V(|f|,P) \leq V(f,P)$

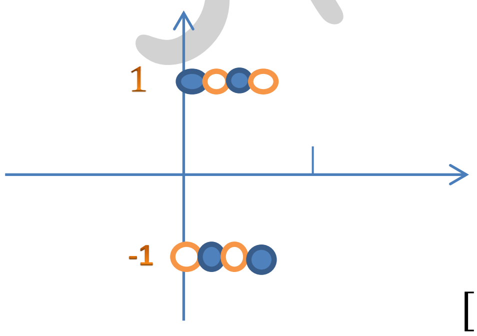
و بأخذ sup للطرفين نجد وكون f د , ت , م فإن $\mathrm{V}_a^b|f| \leq \mathrm{V}_a^b f < \infty$

ومنه فإن $|f|$ دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$

و لكن العكس غير صحيح و سنثبت ذلك بوضع مثال معاكس ينفي أن العكس صحيح بالحالة العامة أي:

لتكن f دالة معرفة بالشكل التالي

$$f:[0,1] \to \mathbb{R} : f(x) = \begin{cases} +1 & , \quad x \in \mathbb{Q} \\ -1 & , \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$



الرسم تقريبي لوجود عدد غير منته من الأعداد العادية في المجال $[0,1]$

Syria Math Team

و الأن سوف نثبت أن $|f|$ دالة ذات تغير محدود على $[0,1]$ وأن f ليست دالة ذات تغير محدود على $[0,1]$

إن $|f(x)| = 1$ و ذلك $\forall x \in [0,1]$ و منه فإن $\mathrm{V}_0^1 |f| = 0 < \infty$ منه فإن $|f|$ دالة ذات تغير محدود على المجال $[0,1]$ أو يمكننا القول أنها دالة ثابتة و بالتالي فهي دالة ذات تغير محدود على $[0,1]$

و الأن لإثبات أن f ليست دالة ذات تغير محدود نقوم أولا بأخذ التجزئة $P \in \mathbb{P}[0,1]$

$$P = \{0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

و ذلك بحيث $x_0, x_2, x_4, \dots, x_n \in \mathbb{Q}\}$ و $x_1, x_3, x_5, \dots, x_{n-1} \notin \mathbb{Q}$:

ومنه فإن $V(f,P) = |f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_2) - f(x_1)| + \cdots + |f(x_n) - f(x_{n-1})|$

$$= |-1-1| + |1-(-1)| + \cdots + |1-(-1)| = \underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{\text{n مرة}} = 2n$$

$$\bigvee_0^1 f = \lim_{P \in \mathbb{P}[0,1]} V(f,P) = \lim_{n\to\infty} \{2n\} = +\infty$$

و منه فإن f ليست دالة ذات تغير محدود على$[0,1]$ و بذلك العكس ليس بالضرورة صحيح.

3- مبرهنة:

اذا كانت f دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ فإن $\propto f$ دالة ذات تغير محدود $[a,b]$ حيث $\propto \in \mathbb{R}$

البرهان:

من الفرض لدينا f دالة ذات تغيير محدود و منه إن $\mathrm{V}_a^b f < \infty$ و سنثبت أن $\mathrm{V}_a^b \propto f < \infty$ و ذلك بأخذ التجزئة$P \in \mathbb{P}[a,b]$

$$P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$$

و الأن $V(\propto f, P) = \sum_{k=1}^{n} |\propto f(x_k) - \propto f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} |\propto (f(x_k) - f(x_{k-1}))|$

$$= |\propto| \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = |\propto|\, \mathrm{V(f,P)}$$

و منه فإن $V(\propto f, P) = |\propto|\, V(f,P)$

فبأخذ الsup للطرفين نجد أن $\mathrm{V}_a^b \propto f = |\propto|\, \mathrm{V}_a^b f < \infty$

و منه فإن f ∝ دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$

4-مبرهنة:

اذا كانت f دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ فإن $\frac{1}{f}$ دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ بشرط أن

$$\forall x \in [a,b]: |f(x)| \geq c > 0$$

البرهان:

من الفرض لدينا f دالة ذات تغير محدود أن $\mathrm{V}_a^b f < \infty$ و سنثبت أن $\mathrm{V}_a^b \frac{1}{f} < \infty$ وذلك بإخذ التجزئة $P \in \mathbb{P}[a,b]$

$$P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}:$$

من الفرض لدينا $|f(x)| \geq c > 0 : \forall x \in [a,b]$

إن $V\left(\frac{1}{f},P\right) = \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{1}{f(x_k)} - \frac{1}{f(x_{k-1})}\right| = \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{f(x_k).f(x_{k-1})}\right|$

حيث $|f(x)| \geq c > 0 \to \frac{1}{|f(x)|} \leq \frac{1}{c} \;\; : \forall x \in [a,b]$

و من ما سبق نستنتج أن $(*)$ $\frac{1}{|f(x_k).f(x_{k-1})|} \leq \frac{1}{c^2}$ أي أن

حسب (*)

$$V\left(\frac{1}{f},P\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{|f(x_k)-f(x_{k-1})|}{|f(x_k).f(x_{k-1})|} \leq \frac{1}{c^2}\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})| = \frac{1}{c^2}V(f,P)$$

و بأخذ الsup للطرف الأول و الأخير نجد:

و منه فإن $\mathrm{V}_a^b \frac{1}{f} = \mathrm{V}_a^b f \,.\frac{1}{c^2} < \infty$ ومنه فإن $\frac{1}{f}$ دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ و منه يتم المطلوب.

5- مبرهنة:

اذا كانت f,g دالتين كل منهما ذات تغير محدود على $[a,b]$ فإن :

a) $\psi = f + g$ دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$

b) $\vartheta = f - g$ دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$

c) $\varphi = f.g$ دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$

d) $\phi = \frac{f}{g}$ دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ بشرط $\forall x \in [a,b]: |g(x)| \geq c > 0$

البرهان:

a- لنفرض أن f, g دالتين كل منهما ذات تغير محدود على $[a,b]$ و لنثبت أن ψ دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ و الآن لنأخذ التجزئة $P \in \mathbb{P}[a,b]$.

$$P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$$

ومنه لنأخذ المجموع $V(\psi, P) = \sum_{k=1}^{n} |\psi(x_k) - \psi(x_{k-1})|$

$$= \sum_{k=1}^{n} |(f+g)(x_k) - (f+g)(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) + g(x_k) - f(x_{k-1}) - g(x_{k-1})|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1}) + g(x_k) - g(x_{k-1})|$$

من خواص القيمة المطلقة

$$\leq \sum_{k=1}^{n} [|f(x_k) - f(x_{k-1})| + |g(x_k) - g(x_{k-1})|] = V(f,P) + V(g,p)$$

و منه فإن $V(f+g, P) \leq V(f,P) + V(g,P)$

و بأخذ sup الطرفين نجد $V_a^b \psi \leq V_a^b f + V_a^b g < \infty$

ومنه فإن ψ دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ و منه يتم المطلوب

b- $\vartheta = f - g = f + ((-1)g)$ إن $((-1)g)$ دالة ذات تغير محدود حسب المبرهنة 3

و f من الفرض دالة ذات تغير محدود و حسب a نجد أن $\vartheta = f - g$ دالة ذات تغير محدود

c- لنثبت أن φ دالة ذات تغير محدود أي $V_a^b \varphi < \infty$ و لنأخذ التجزئة $P \in \mathbb{P}[a,b]$

$$P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$$

و منه فإن $V(\varphi, P) = \sum_{k=1}^{n} |(f.g)(x_k) - (f.g)(x_{k-1})|$

$$= \sum_{k=1}^{n} |f(x_k).g(x_k) - f(x_{k-1}).g(x_{k-1})|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |f(x_k).g(x_k) + f(x_{k-1}).g(x_k) - f(x_{k-1}).g(x_k) - f(x_{k-1}).g(x_{k-1})|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |g(x_k)(f(x_k) - f(x_{k-1})) + f(x_{k-1})(g(x_k) - g(x_{k-1}))|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} |g(x_k)| \ |f(x_k) - f(x_{k-1})| \ + \ |f(x_{k-1})| \ |g(x_k) - g(x_{k-1})|$$

و كون g دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ فإن g محدودة على $[a,b]$ أي أن:

$$\exists A > 0: |g(x)| \leq A: \forall x \in [a,b]$$

و كون f دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ فإن f محدودة على $[a,b]$ أي أن:

$$\exists B > 0: |f(x)| \leq B: \forall x \in [a,b]$$

و منه بإكمال ما بدانا به نجد أن $V(f,P)$

$$\leq A \sum_{k=1}^{n} \ |f(x_k) - f(x_{k-1})| + B \sum_{k=1}^{n} \ |g(x_k) - g(x_{k-1})| = A\, V(f,P) + B\, V(g,P)$$

و منه فإن $V(\varphi,P) \leq A\, V(f,P) + B\, V(g,P)$

بأخذ sup للطرفين نجد أن $\mathrm{V}_a^b \varphi \leq A\, \mathrm{V}_a^b f + B\ \mathrm{V}_a^b g < \infty$

و منه فإن φ دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ و بذلك يتم المطلوب.

و d يتم بنفس الطريقة

انتهت المحاضرة

إعداد: صفا الأيوبي *ياسين الحلبي *شهد حايك البوشي

Syria Math Team

Syria Math Team