◄ دكتور المادة: غصون جيرودي

◄ المحاضرة: الرابعة　　عنوان المحاضرة: المضلعات والزمرة

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي في المحاضرة الرابعة من مقررنا الرياضيات المتقطعة وسوف نتناول في هذه المحاضرة المفاهيم التالية :التبديلات الزوجية ـ المضلعات ـ الزمرة .

التبديلات الزوجية :

أي عنصر من S_n يقال عنه إما زوجي أو فردي ويرمز لمجموعة العناصر الزوجية في S_n بـ A_n وإن

$$|A_n| = \frac{|S_n|}{2} = \frac{n!}{2}$$

إن التبديل المطابق $(n) \ldots\ldots (3)(2)(1) = id$ زوجي $\forall n \geq 2$

الحلقة $(a_1\ a_2\ \ \ldots . a_k)$ تكون زوجية إذا كان k فردي وبالعكس

مثال: ($1\ 3\ 2$) عنصر زوجي من A_3 ($k = 3$ فردي ومنه الحلقة عنصر زوجي).

في التبديل المكتوب كجداء حلقات $\sigma = (a_1, a_2, \ldots, a_n)(b_1, b_2, \ldots, b_k)(c_1, c_2, \ldots, c_m)$

اذا كان $\boldsymbol{m}$ فردي فإن الحلقة $(\boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2}, \ldots, \boldsymbol{c_m})$ زوجية

وكان $\boldsymbol{n}$ عدد فردي فإن الحلقة $(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_n})$ زوجية

وكان $\boldsymbol{k}$ عدد زوجي فإن الحلقة $(\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \ldots, \boldsymbol{b_k})$ فردية

فإن التبديل $\boldsymbol{\sigma}$ يكون فردي (لأن زوجي +زوجي +فردي=فردي) ومنه التبديل فردي .

بالحالة العامة :نحسب المقدار

$$\boxed{(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{1}) + (\boldsymbol{n}+\boldsymbol{1}) + (\boldsymbol{k}+\boldsymbol{1}) = \begin{cases} \text{فردي} \Longrightarrow \text{التبديل فردي} \\ \text{زوجي} \Longrightarrow \text{التبديل زوجي} \end{cases}}$$

مثال : لدينا عناصر S_3 كتباديل هي

$$S_3=\left\{\begin{matrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\end{matrix}\right\}$$

وتكتب كحلقات :

$$S_3=\left\{\begin{matrix}id,(13\ 2),(1\ 2\ 3)\\(2\ 3),(1\ 2),(1\ 3)\end{matrix}\right\}$$

ومنه تكون العناصر الزوجية في S_3 هي :

$$:A_3=\{id,(1\ 3\ 2),(1\ 2\ 3)\}\Longrightarrow|A_3|=\frac{3!}{2}=3$$

المضلعات :

لنعرف من المجموعة S_n المجموعة D_n وهي مجموعة كل الدورانات $(rotations)$ والانعكاسات $(reflections)$ للمضلع n .

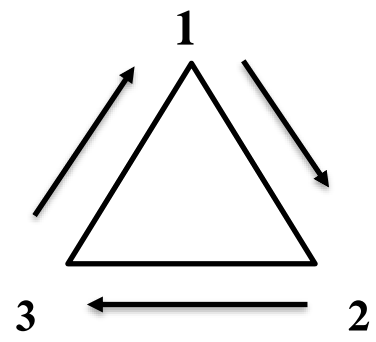
المضلع n : هو مضلع يحوي n ضلع متساوي و n زاوية متساوية

$$|D_n|=2n\begin{cases}n=\text{عدد عناصر مجموعة الدورانات}\\n=\text{عدد عناصر مجموعة الانعكاسات}\end{cases}$$

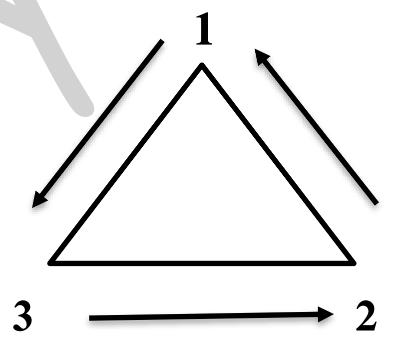
مثال : ليكن لدينا D_3 عندها

مجموعة الدورانات: $\{id,(1\ 2\ 3)\ (1\ 3\ 2)\}$

مجموعة الانعكاسات $\{(\ 3\ 1)\ (2\ 3)\ (1\ 2)\}$



الدوران (1 2 3)

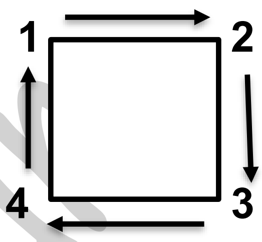


الدوران (1 3 2)

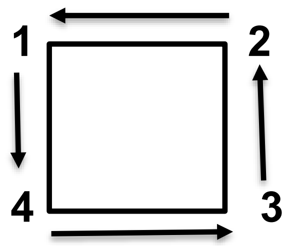
مثال : لنعرف من المجموعة S_4 المجموعة D_4

عندها تكون مجموعة الدورانات $\{id, (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 4\ 3\ 2), (1\ 3)(2\ 4)\}$

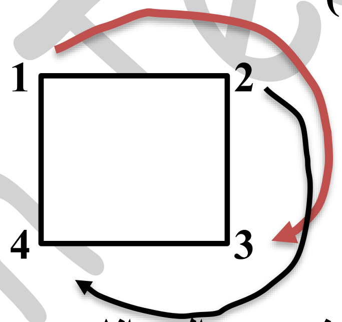
ومجموعة الانعكاسات : $\{(1\ 4)(\mathbf{2\ 3}), (\mathbf{1\ 2})(\mathbf{3\ 4}), (\mathbf{1\ 3})(\mathbf{2\ 4})\}$



الدوران $(1\ 2\ 3\ 4)$



الدوران $(1\ 4\ \ 3\ 2)$

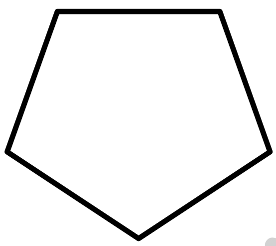


الدوران $(1\ \ 3)(2\ 4)$

ملاحظة : id هو عنصر من الدورانات .

كيفية إيجاد الدوران والانعكاسات :

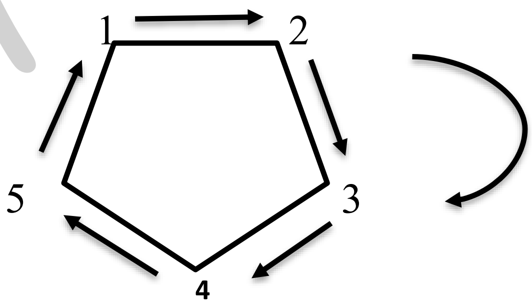
مثال : لنأخذ من المجموعة S_5 المجموعة D_5 (مجموعة الدورانات والانعكاسات)



الدورانات : إن الشكل المقابل يدور بجهة عقارب الساعة أو عكس عقارب الساعة

الدوران الأول id: هو يتحقق بحيث تكون جميع النقاط الثابتة .

الدوران الثاني : وهو الدوران بجهة عقارب الساعة بمسافة نقطة واحدة كل خطوة



النقطة (1) تدور إلى (2): $\mathbf{1 \to 2}$

النقطة (2) تدور إلى (3): $\mathbf{2 \to 3}$

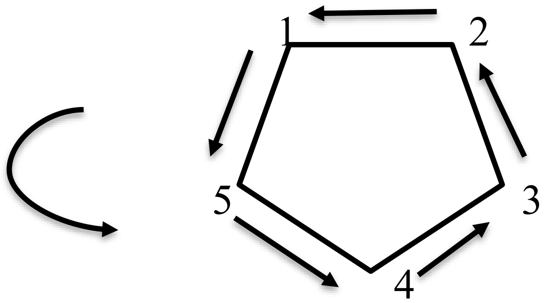
النقطة (3) تدور إلى (4): $\mathbf{3 \to 4}$

النقطة (4) تدور إلى (5) $\mathbf{4 \to 5}$

النقطة (5) تدور إلى (1) **1** ← **5** ⇐

فيتشكل الدوران (5 4 3 2 1)

الدوران الثالث : وهو الدوران بعكس عقارب الساعة بمسافة نقطة واحدة كل خطوة



النقطة (1) تدور إلى (5) 5 ← 1

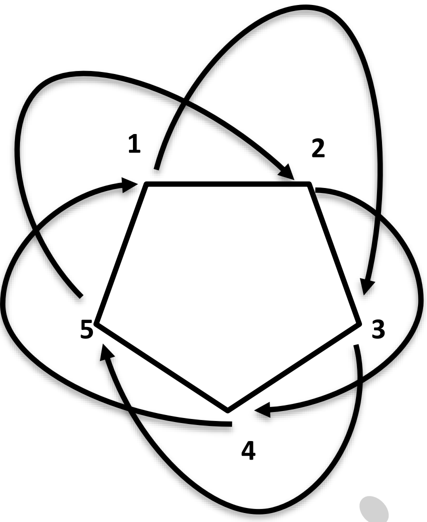
النقطة (5) تدور إلى (4) 4 ← 5

النقطة (4) تدور إلى (3) 3 ← 4

النقطة (3) تدور إلى (2) 2 ← 3

النقطة (2) تدور إلى (1) 1 ← 2 ⇐فيتشكل الدوران (2 3 4 5 1)

الدوران الرابع:يمكننا أن ندور بمسافة نقطتين (بجهة عقارب الساعة).



النقطة (1) تدور إلى (3) 3 ← 1

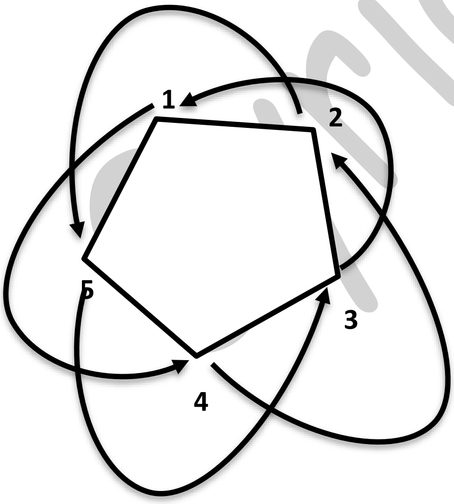
النقطة (3) تدور إلى (5) 5 ← 3

النقطة (5) تدور إلى (2) 2 ← 5

النقطة (2) تدور إلى (4) 4 ← 2

النقطة (4) تدور إلى (1) 1 ← 4 ⇐فيتشكل الدوران (4 2 5 3 1)

الدوران الخامس:يمكننا أن ندور بمسافة نقطتين (بعكس عقارب الساعة).



النقطة (1) تدور إلى (4) 4 ← 1

النقطة (4) تدور إلى (2) 2 ← 4

النقطة (2) تدور إلى (5) 5 ← 2

النقطة (5) تدور إلى (3) 3 ← 5

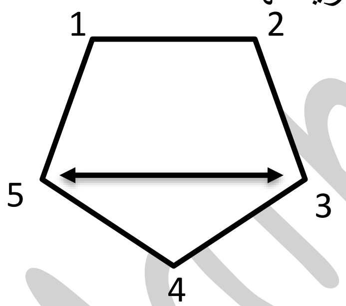
النقطة (3) تدور إلى (1) 1 ← 3 ⇐فيتشكل الدوران (3 5 2 4 1)

بالملاحظة :

1. إذا قمنا بالتدوير لمسافة ثلاث نقاط باتجاه عقارب الساعة فسيظهر لنا الدوران الخامس.
2. إذا قمنا بالتدوير لمسافة ثلاث نقاط بعكس عقارب الساعة فسيظهر لنا الدوران الرابع.
3. إذا قمنا بالتدوير لمسافة أربع نقاط باتجاه عقارب الساعة فسيظهر لنا الدوران الثالث.
4. إذا قمنا بالتدوير لمسافة أربع نقاط بعكس عقارب الساعة فسيظهر لنا الدوران الأول .
5. عدد عناصر الدوران هي (n) باعتبار أن id أحد الدورانات .(وكما رأينا في المثال السابق عدد الدورانات يساوي $n = 5$).
6. إذا قمنا بالتدوير لمسافة خمس نقاط باتجاه عقارب الساعة فسيظهر لنا الدوران الأول (جميع النقط تبقى ثابتة)

الانعكاسات :

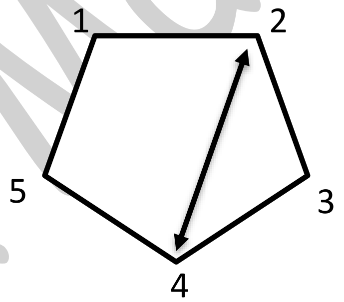
- انعكاس زاوية هي الزاوية المقابلة لها .
- انعكاس ضلع هو الضلع المقابلة والموازية لها



❖ الانعكاس الأول:

انعكاس الضلع (1 2) هو الضلع (5 3)

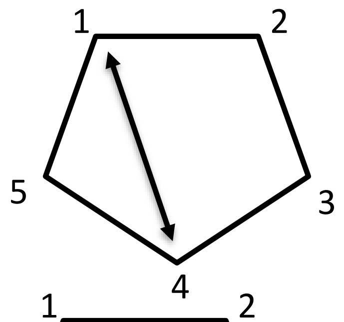
فيكتب الانعكاس (1 2) (5 3)



❖ الانعكاس الثاني

انعكاس الضلع(1 5) هو الضلع (2 4)

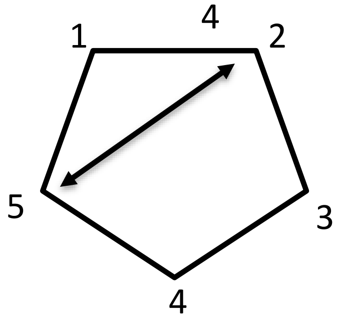
فيكتب الانعكاس (1 5) (2 4)



❖ الانعكاس الثالث

انعكاس الضلع (3 2) هو الضلع (1 4)

فيكتب الانعكاس (3 2) (1 4)



❖ الانعكاس الرابع:

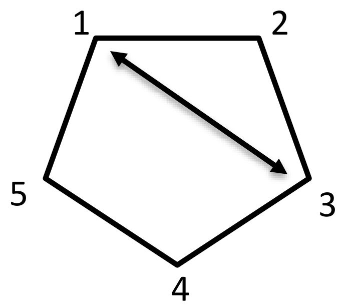
انعكاس الضلع (4 3) هو الضلع (5 2)

فيكتب الانعكاس (4 3) (5 2)

❖ **الانعكاس الخامس:**

انعكاس الضلع $(4\ 5)$ هو الضلع $(1\ 3)$

فيكتب الانعكاس $(5\ 4)\ (1\ 3)$



بالملاحظة

1. انعكاس كل ضلع من الانعكاسات السابقة تتضمن انعكاسات الزوايا .
2. عدد عناصر الانعكاسات هو n (في مثالنا عدد الانعكاسات 5)
3. ومنه عدد عناصر D_5 هو $|D_5| = 2n = 2 \times 5 = 10$

ومنه :

الدورانات	الانعكاسات
id	$(5\ 3)(1\ 2)$
$(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$	$(2\ 4)(1\ 5)$
$(1\ 5\ 4\ 3\ 2)$	$(5\ 1)(3\ 2)$
$(1\ 3\ 5\ 2\ 4)$	$(2\ 5)(4\ 3)$
$(1\ 4\ 2\ 5\ 3)$	$(1\ 3)(5\ 4)$

تعريف الزمرة : هي بنية على الشكل $< G, \sim >$ حيث G مجموعة غير خالية مزودة بقانون ثنائي $\sim$ يحقق:

1. $\sim$ مغلق في G أي $\forall x, y \in G: x \sim y \in G$
2. $\sim$ تجميعي أي $\forall x, y, z \in G: (x \sim y) \sim z = x \sim (y \sim z)$
3. يوجد حيادي في Gبالنسبة ل $(\sim)$ أي: $\exists e \in G\ ;\ \forall x \in G: x \sim e = e \sim x = x$
4. يوجد لكل عنصر نظير في G بالنسبة ل $(\sim)$ أي: :

$$\forall x \in G \exists x^{-1} \in G: x \sim x^{-1} = x^{-1} \sim x = e$$

ملاحظة : إذا كان $x \sim y = y \sim x$ لكل $x, y \in G$ فإن $(\sim)$ زمرة تبديلية في G

مثال : أثبت أن $< S_2, 0 >$ هي زمرة باستخدام جدول كيلي :

لدينا $S_2 = \{id, (1\ 2)\}$

$\circ$	id	$(1\ 2)$
id	$(id \circ id = id)$	$id(1\ 2) = (1\ 2)$
$(1\ 2)$	$(1\ 2) \circ id = (1\ 2)$	$(1\ 2)(1\ 2) = id$

ومنه :

1. $\circ$ مغلق في S_2
2. $\circ$ تجميعي في S_2
3. يوجد حيادي في S_3 بالنسبة لـ $\circ$ وهو id
4. يوجد لكل عنصر نظير ، حيث نظير $(1\ 2)$ هو $(1\ 2)$ ونظير id هو id

تمرين : هل $< A_3, \circ >$ زمرة ولماذا ؟

A_3 هي مجموعة الحلقات الزوجية من S_3

لدينا: $A_3 = \{id, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$

$\circ$	id	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 3\ 2)$
id	$id \circ id = id$	$id \circ (1\ 2\ 3) = (1\ 2\ 3)$	$id \circ (132) = (132)$
$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 2\ 3) \circ id = (1\ 2\ 3)$	$(1\ 2\ 3) \circ (1\ 2\ 3) = (1\ 3\ 2)$	$(123) \circ (132) = id$
$(1\ 3\ 2)$	$(132) \circ id = (132)$	$(132) \circ (123) = id$	$(132) \circ (132) = (123)$

ومنه :

1. $\circ$ مغلق في A_3
2. $\circ$ تجميعي في A_3
3. يوجد حيادي في A_3 بالنسبة لـ $\circ$ وهو id
4. يوجد لكل عنصر نظير حيث نظير (132) هو (123) ونظير (123) هو (132) ونظير id هو id

ملاحظة: إن البنية: $< S_n, 0 >$ $< A_n, 0 >$, دائما هي زمرة .

<u>**إعداد :سماح علوان & سندس درويش &نذير تيناوي**</u>