نظري

◄ دكتور المادة: ريم الحاج خليفة

◄ المحاضرة: الثامنة ◄ عنوان المحاضرة: المثاليات

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١- مبرهنتين تخص المثاليات .
٢- مفهوم المجموع المباشر للمثاليات و العنصر الجامد في الحلقة مع أمثلة .
٣- العوامد مع أمثلة .

و الأن لنبدأ :

مبرهنة : لتكن $\mathcal{R}$ حلقة وَ A مثالياً يسارياً في $\mathcal{R}$ وَ B مثالياً يمينياً في $\mathcal{R}$ عندئذٍ :

١- $1 \in A$ عندما وفقط عندما $\mathcal{R} = A$.
٢- $1 \in B$ عندما وفقط عندما $\mathcal{R} = B$.
٣- إذا وجد في A عنصر قابل للقلب من اليسار فإن $\mathcal{R} = A$.
٤- إذا وجد في B عنصر قابل للقلب من اليمين فإن $\mathcal{R} = B$.

البرهان

لدينا حلقة و مثاليين و أخذنا سابقا أنه في أي حلقة $\mathcal{R}$ كلا من المجموعة $\mathcal{R}$ و $\{0\}$ تشكل مثاليا في $\mathcal{R}$

١- بفرض أن $1 \in A$ عندئذٍ $\forall x \in \mathcal{R}$ فإن $x = x.1 \in A$ وبالتالي يكون :
$\mathcal{R} \subseteq A$ ولدينا A مجموعة جزئية في $\mathcal{R}$ وبالتالي من الاحتوائين المعاكسين :

$$\mathcal{R} = A \Leftarrow \begin{cases} \mathcal{R} \subseteq A \\ A \subseteq \mathcal{R} \end{cases}$$

٢- تبرهن بنفس الطريقة .
٣- بفرض أنه يوجد في A عنصر قابل للقلب وليكن a عندئذٍ يوجد له مقلوب وليكن $b \in \mathcal{R}$ ومنه $\underbrace{b.a = 1 \in A}_{\text{مثالي يساري}}$ وحسب الطلب (١)

$1 \in A$ فإن $\mathcal{R} = A \Leftarrow b.a = 1 \in A$

٤- تبرهن بنفس الطريقة .

مبرهنة مهمة : إذا كان F حقلاً ما فإن F يحوي مثاليين هما المجموعة $\{0\}$ والحقل F .

البرهان

ليكن F حقلاً ما وَ A مثالياً في F عندئذٍ إذا كانت $A=\{0\}$ عندئذٍ يتم المطلوب حسب مبرهنة سابقة (أي حلقة ما تحوي مثاليين هما المجموعة $\{0\}$ والحلقة).
إذا كان $A\neq\{0\}$ عندئذٍ يوجد عنصر $a\in A$ وهو مغاير للصفر ولما كان F حقلاً فإن العنصر a يملك مقلوب في F و حسب المبرهنة السابقة (إذا وجد مقلوب في الحلقة فإن الحلقة تساوي المثالية)

$$\Leftarrow A=F$$

تعريف: ليكن $\mathcal{R}$ حلقة وَ $A_1,A_2,\dots,A_n$ مجموعة من المثاليات اليسارية (اليمينية) في $\mathcal{R}$.

نرمز عادة للمجموع المباشر للمثاليات $A_1,A_2,\dots,A_n$ بالرمز: $\bigoplus_{i=1}^{n}A_i$ أو $\sum_{i=1}^{n}\oplus A_i$ وتعني كل حد A_i حداً مباشراً .

نتيجة:

ليكن $\mathcal{R}$ حلقة وَ A مثالياً يسارياً (يمينياً) في $\mathcal{R}$ عندئذٍ يكون المثالي اليساري (اليميني) A هو حداً مباشراً في $\mathcal{R}$ إذا وجد مثالي يساري (يميني) B في $\mathcal{R}$ تحقق $\mathcal{R}=\mathrm{A}\oplus\mathrm{B}$.

تعريف: ليكن $\mathcal{R}$ حلقة وليكن $a\in\mathcal{R}$ نقول عن العنصر a أنه جامد في $\mathcal{R}$ إذا تحقق $a^2=a$

أمثلة:

١. في أي حلقة واحدية $\mathcal{R}$ كلاً من العددين $0,1$ هو عنصر جامد في $\mathcal{R}$
لأن $1^2=1$, $0^2=0$ تحقق شروط أن مربع العنصر يساوي نفسه فهو عنصر جامد .
٢. في الحلقة $\mathbb{Z}_6=\{0,1,2,3,4,5\}$ كلا من $0,1,3,4$ عناصر جامدة .
٣. ليكن $\mathcal{R}$ حلقة وَ $\mathcal{M}_2(\mathcal{R})$ حلقة المصفوفات عندئذٍ هل المصفوفتان $\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$ جامدتان

$$\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\ \text{جامدة}$$

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\ \text{جامد}$$

نتائج

١- ليكن $\mathcal{R}$ حلقة عندئذٍ إذا كان العنصر $a\in\mathcal{R}$ عنصراً جامداً فإن $(1-a)\in\mathcal{R}$ هو أيضاً عنصر جامد
٢- إذا كانت $\mathcal{R}$ حلقة وَ $e\in\mathcal{R}$ عنصراً جامداً عندئذٍ كلاً من $\mathcal{R}e,\mathcal{R}(1-e)$ هي حدود مباشرة في $\mathcal{R}$ بالإضافة

$$\mathcal{R}=\mathcal{R}e\oplus\mathcal{R}(1-e)$$

مثال: حلقة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}_6=\{0,1,2,3,4,5\}$ نلاحظ بأن العناصر $3,4$ هي عناصر جامدة في $\mathbb{Z}_6$ وبالاعتماد على النتيجة السابقة نستطيع أن نكتب $\mathbb{Z}_6=4\mathbb{Z}_6\oplus 3\mathbb{Z}_6$

العوادم

إذا كانت $\mathcal{R}$ حلقة وليكن $a \in \mathcal{R}$ المجموعة $r(a) = \{x : x \in \mathcal{R}\, ; ax = 0\}$ تشكل مثالياً يسارياً في $\mathcal{R}$. عندئذٍ نسمي المجموعة $r(a)$ العادم اليميني للعنصر a في $\mathcal{R}$.
$l(a) = \{x : x \in \mathcal{R}\, ; xa = 0\}$ ونسمي المجموعة $l(a)$ العادم اليساري للعنصر a في $\mathcal{R}$.

مثال: ليكن $\mathcal{R}$ حلقة تبديلية وواحدية وليكن A, B مثاليين في $\mathcal{R}$ محققاً $\mathcal{R} = A + B$.
أثبت أن $A.B = A \cap B$

الحل:

وجدنا حسب نظرية سابقة (إذا كانت $\mathcal{R}$ حلقة تبديلية وكان A, B مثاليين في $\mathcal{R}$ فإن)

$$A.B \subseteq A \cap B$$

والآن سوف نثبت الاحتواء المعاكس لكي تتحقق المساواة .

ليكن $x \in A \cap B$ بما أن $\mathcal{R} = A + B$ فرضاً وأن $1 \in \mathcal{R}$ لأنها حلقة واحدية فإنه يوجد

$$1 = a + b \quad : a \in A \quad , \quad b \in B$$

نضرب الطرفين بالعنصر x :

$$x = \underbrace{ax}_{\in A.B} + \underbrace{bx}_{\in A.B} \in A.B \Rightarrow x \in A.B \Rightarrow A \cap B \subseteq A.B \Rightarrow A \cap B = A.B$$

مثال: لتكن $\mathcal{R}$ حلقة تبديلية وواحدية تحقق الشرط التالي : $\forall 0 \neq a \in \mathcal{R}$ فإن $a\mathcal{R} = \mathcal{R}$ والمطلوب
أثبت أن الحلقة $\mathcal{R}$ تشكل حقل .

الحل:

بما أن الحلقة تبديلية وواحدية إذاً تحوي عنصرين على الأقل .

فيكفي حتى تكون الحلقة $\mathcal{R}$ تشكل حقلاً أن نبرهن أن لكل عنصر من $\mathcal{R}$ مغاير للصفر يملك مقلوب .

ليكن $0 \neq a \in \mathcal{R}$ وحسب الفرض لدينا $a\mathcal{R} = \mathcal{R}$ وبما أن $1 \in \mathcal{R}$ فرضاً فإن $1 \in a\mathcal{R}$ وبالتالي
يوجد عنصر $b \in \mathcal{R}$ بحيث $1 = ab \Longleftarrow \underbrace{ab = ba}_{\text{تبديلية } \mathcal{R}} = 1$ أي أن العنصر a قابل للقلب في $\mathcal{R} \Leftarrow \mathcal{R}$
تشكل حقل .

مبرهنة: ليكن $\mathcal{R}$ حلقة وَ $e \in \mathcal{R}$ عنصر جامد عندئذٍ برهن أن :

١. $r(e) = (1-e)\mathcal{R}$
٢. $l(e) = \mathcal{R}(1-e)$

البرهان

١) ليكن $x \in r(e)$ عندئذ يكون حسب تعريف $r(e) \Leftarrow ex = 0$

وأن $1 = 1 + e - e$

نضرب الطرفين بـ $x \Leftarrow x = \underbrace{ex}_{=0} + (1-e)x$

$$x = (1-e)x \in (1-e)\mathcal{R} \Rightarrow x \in (1-e)\mathcal{R}$$

وبالتالي $r(e) \subseteq (1-e)\mathcal{R}$

ومن جهة ثانية :

ليكن $y \in (1-e)\mathcal{R}$ عندئذٍ يوجد $r \in \mathcal{R}$ بحيث $y = (1-e)r$ نضرب الطرفين بـ $e \Leftarrow$

$$ey = e(1-e)r = \Big(e - \underbrace{e^2}_{e^2=e \text{ حسب تعريف العنصر الجامد}}\Big)r = (e-e)r = 0 \Rightarrow ey = 0$$

$$\Rightarrow y \in r(e)$$

$$\Rightarrow (1-e)\mathcal{R} \subseteq r(e)$$

$$\Rightarrow r(e) = (1-e)\mathcal{R}$$

٢) **بنفس الطريقة .**

انتهت المحاضرة

إعداد: هلا هجو . لانا شهاب . أحمد أبو التوت