◄ دكتور المادة: علي قبوي

◄ المحاضرة: الثامنة　　　عنوان المحاضرة: التوزيع الطبيعي والمعياري

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

التوزيع الطبيعي والمعياري

مبرهنة

إذا كان $X \sim N(\mu, \sigma^2)$، وكان $a \neq 0$; $Y = aX + b$ ، فإن $Y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.

البرهان

إن الدالة $y = ax + b$ مطردة (متزايدة دوما أو متناقصة دوما)، حسب قيمة (a) موجبة أو سالبة وبالتالي حسب مبرهنة سابقة "في مقرر نظرية الاحتمالات"

دالة الكثافة
$$f_Y(y) = f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left|\left(g^{-1}(y)\right)'_y\right|$$

لكن :

$$y = g(x) = ax + b$$
$$\Rightarrow x = g^{-1}(y) = \frac{y - b}{a}$$
$$x'_y = \left(g^{-1}(y)\right)'_y = \frac{1}{a}$$
$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} . e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

وبالتالي :

$$f_X\left(g^{-1}(y)\right) = f_X\left(\frac{y - b}{a}\right)$$

$$\Rightarrow f_X\left(g^{-1}(y)\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} . e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{y-b}{a}-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$\Rightarrow f_X\left(g^{-1}(y)\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} . e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-a\mu-b}{a\sigma}\right)^2}$$

نعوض في المبرهنة فنجد :

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} . e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-a\mu-b}{a\sigma}\right)^2} . \left|\frac{1}{a}\right|$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{|a|\sigma\sqrt{2\pi}} . e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-a\mu-b}{a\sigma}\right)^2}$$

وهذه الدالة $f_Y(y)$ هي دالة كثافة احتمالية لمتغير عشوائي طبيعي وسيطاه :

$$\mu_* = a\mu + b$$

$$\sigma_*^2 = a^2\sigma^2$$

$$\Rightarrow Y\sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$$

نتيجة :

إذا كان $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ فإن، $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$.

البرهان :

بالتعويض في المبرهنة السابقة

$$b = -\frac{\mu}{\sigma} \quad , a = \frac{1}{\sigma}$$

فنجد أن التوزيع :

$$Y = aX + b = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

$$Y\sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$$

$$\Rightarrow Y\sim N\left(\frac{1}{\sigma}\mu + \frac{-\mu}{\sigma}, \frac{1}{\sigma^2}\sigma^2\right)$$

$$\Rightarrow Y\sim N(0,1)$$

ملاحظة ١:

نسمي عملية إيجاد $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ **"معايرة"**

ملاحظة ٢:

إذا كان $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ ، فإن

$$F_X(x) \underbrace{=}_{\text{بالمعايرة}} P(X \le x)$$

$$\Longrightarrow F_X(x) = P\left(\underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{=Z\sim N(0,1)} \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\Longrightarrow F_X(x) = P\left(Z \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\Longrightarrow F_X(x) = \phi_Z\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

حيث (ϕ_Z) **دالة التوزيع الاحتمالية** لمتغير عشوائي طبيعي معياري عند النقطة $\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$.

أيضا لحساب الاحتمال التالي وله نفس القانون في جميع الحالات (أكبر تماما،أكبر أو يساوي، أصغر تماما، أصغر أو يساوي) **"هام للتطبيق بحل التمارين والأمثلة"**

$$P\left(a \begin{smallmatrix}\ge\\>\\\le\\<\end{smallmatrix} \underbrace{X}_{\text{طبيعي (مستمر)}} \begin{smallmatrix}\ge\\>\\\le\\<\end{smallmatrix} b\right) = F_X(b) - F_X(a)$$

$$\underbrace{\Longrightarrow}_{\text{بالمعايرة}} P\left(a \begin{smallmatrix}\ge\\>\\\le\\<\end{smallmatrix} X \le \begin{smallmatrix}\ge\\>\\\le\\<\end{smallmatrix} b\right) = \phi_Z\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \phi_Z\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

المعايرة هي الانتقال من المتغير العشوائي الطبيعي إلى المتغير العشوائي المعياري .

جدول التوزيع الطبيعي المعياري وطريقة استخدامه

إن هذا الجدول يُعطي قيم دالة التوزيع الاحتمالية $\phi_Z(ʒ)$ ابتداءً من الصفر وبفاصل (0.01) بين كل قيمة والقيمة التي تليها .

ʒ	0.00	0.01	0.02	.....	0.09
0	$0.5 = P(Z \le 0) = \phi_Z(0)$				
0.1			$\phi(0.21)$		
⋮					
0.9			$\phi(0.92)$		
⋮					
3.0					$\phi(3.09)$
3.1					$\phi(3.19)$
⋮					
3.5					

ملاحظة :

تم تنزيل الجدول بجميع قيمه في المكتبة "جيل الرسالة"

وقد نوّه الدكتور لأهميته للامتحان "هناك سؤال امتحاني اكيد منه"

نتائج

١- العمود الأيسر يحوي قيم $(\mathfrak{z})$ ابتداءً من الصفر وبفاصل (0.01) بين كل قيمة والقيمة التي تليها .

٢- السطر الرأسي (الأفقي) يحوي المنزلة العشرية الثانية لقيم $(\mathfrak{z})$.

٣- قيم الدالة $\phi_Z(\mathfrak{z}) = P(Z \le \mathfrak{z})$ هي ملتقى سطر مع عمود المقابل ل $(\mathfrak{z})$.

مثال (١):

بفرض أن $X \sim N(5,4)$ أوجد $P(X < 8)$.

الحل

بما أن $X \sim N(5,4)$ فإن $(\mu = 5)$ و $(\sigma^2 = 4 \Rightarrow \sigma = 2)$، وبالتالي :

$$P(X < 8) \underbrace{=}_{\text{بالمعايرة}} P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{8-5}{2}\right)$$

$$\Rightarrow P(X < 8) = P(Z < 1.5)$$

باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد :

$$\Rightarrow P(X < 8) = \phi_Z(1.5) = 0.9332$$

مثال (٢):

إذا كان $X \sim N(50,25)$، أوجد $P(X > 62)$ ، $P(|X-40| > 5)$ ، $P(|X-50| < 8)$.

الحل

بما أن $X \sim N(50,25)$ فإن $(\mu = 50)$ و $\left(\sigma^2 = 25 \Rightarrow \sigma = 5\right)$، ومنه

$$* \; P(X > 62) = 1 - P(X \le 62)$$

$$\Rightarrow P(X > 62) \underbrace{=}_{\text{بالمعايرة}} 1 - P\left(\underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{=Z \sim N(0,1)} \le \frac{62-50}{5}\right)$$

$$\Rightarrow P(X > 62) = P(Z \le 2.4)$$

$$\Rightarrow P(X > 62) = 1 - \phi_Z(2.4)$$

$$\Rightarrow P(X > 62) = 1 - 0.9918 = 0.0082$$

$$* \; P(|X-50| < 8) = P(-8 < X - 50 < +8)$$

$$\Rightarrow P(|X-50|<8) \underbrace{=}_{\text{بالمعايرة}} P\left(-\frac{8}{5}< \underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{=Z\sim N(0,1)} <\frac{8}{5}\right)$$

$$\Rightarrow P(|X-50|<8)=P(-1.6<Z<1.6)$$

$$\Rightarrow P(|X-50|<8)=\phi_Z(1.6)-\phi_Z(-1.6)$$

$$\Rightarrow P(|X-50|<8)=\phi_Z(1.6)-[1-\phi_Z(1.6)]$$

$$\Rightarrow P(|X-50|<8)=2\phi_Z(1.6)-1$$

$$\Rightarrow P(|X-50|<8)=2(0.9452)-1=0.8904$$

$$* \, P(|X-40|>5)=1-P(|X-40|\le 5)$$

$$\Rightarrow P(|X-40|>5)=1-P(-5\le X-40\le 5)$$

$$\Rightarrow P(|X-40|>5) \underbrace{=}_{\text{بالمعايرة}} 1-P\left(\frac{-5-10}{5}\le\frac{X-40-10}{\sigma}\le\frac{5-10}{5}\right)$$

$$\Rightarrow P(|X-40|>5)=1-P(-3\le Z\le -1)$$

$$\Rightarrow P(|X-40|>5)=1-[\phi_Z(-1)-\phi_Z(-3)]$$

$$\Rightarrow P(|X-40|>5)=1-\left[\left(1-\phi_Z(1)\right)-\left(1-\phi_Z(3)\right)\right]$$

$$\Rightarrow P(|X-40|>5)=1+\phi_Z(1)-\phi_Z(3)$$

$$\Rightarrow P(|X-40|>5)=1+0.8413-0.9987=0.8426$$

انتهت المحاضرة

إعداد: مهيار طعمة ^نهى حبشية ^نور مهرة

كن لبنة بناء للأمة..

بدل أن تكون معول هدم فيها..