◄ دكتورة المادة: محمد الشيخ

◄ المحاضرة: الرابعة ◄ عنوان المحاضرة: التوابع المثلثية العقدية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1- تمرين عن التابع الأسي العقدي

2- التوابع المثلثية (تعريفها و خواصها)

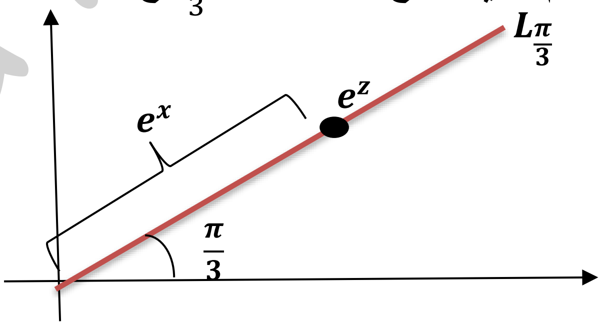
3- تمارين

تمرين : عين صورة المستقيم $D = \left\{z \in \mathbb{C} : z = x + \frac{\pi}{3} i : x \in R\right\}$ وفق التابع الأسي العقدي .

الحل :

لنأخذ $z \in D$ عندئذٍ $arg(e^z) = \frac{\pi}{3}$ حيث وجدنا أن القسم التخيلي من الأس يعبر عن الزاوية للعدد الأسي و أما طويلة الصورة فهي $|e^z| = e^x$ و منه :

e^z يقع على نصف المستقيم الذي يصنع زاوية قدرها $\frac{\pi}{3}$ مع الاتجاه الموجب لمحور الفواصل (زاوية مباشرة)



عندما نجعل x تمسح المجال $]-\infty, +\infty[$ فإن e^x ستتحول ضمن المجال $]0, +\infty[$ و بالتالي العدد العقدي e^z سيمسح كامل نصف المستقيم الذي يصنع زاوية $\frac{\pi}{3}$ مع محور الفواصل الموضح بالرسم أعلاه.

أي أن صورة المجموعة D هي المستقيم $L_{\frac{\pi}{3}}$ بكامله.

التوابع المثلثية العقدية :

تابع التجيب العقدي :

لننظر في المتسلسلة العقدية $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$ ، هي متسلسلة قوى مركزها الصفر و لنبحث في منطقة تقاربها و ذلك باستخدام معيار دالمبير العام :

$$D=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}z^{2n+2}}{(2n+2)!}}{\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z^2}{(2n+2)(2n+1)}\right|=0\ ,\forall z\in\mathbb{C}$$

و بالتالي مهما يكن $z\in\mathbb{C}$ فإن المتسلسلة ستكون متقاربة بإطلاق ... وبالتالي منطقة التقارب هي كامل المستوي العقدي $\mathbb{C}$ و بالتالي إن هذه المتسلسلة تعرّف تابعاً على $\mathbb{C}$ بكاملها و نرمز لهذا التابع بـ $\cos(z)$ و نسميه تابع التجيب العقدي أي :

$$\cos(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

و هو تحليلي على $\mathbb{C}$ بأكملها .

تابع الجيب العقدي : بخطوات مماثلة للتعريف السابق و من أجل المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ فإننا نجد أنها تعرف تابعاً على $\mathbb{C}$ بأكملها ندعوه تابع الجيب العقدي و نرمز له بـ $sin(z)$ أي:

$$sin(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

مشتق تابع التجيب العقدي : كما رأينا في التعريف السابق ، إن التابع $cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$

تحليلي على كامل المستوي العقدي و بالتالي حسب مبرهنة سابقة ، إن المتسلسلة المشتقة تساوي متسلسلة المشتقات أي:

$$(cosz)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}\right)' = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n\, z^{2n-1}}{(2n)!}}_{\text{عند الاشتقاق يزيد دليل بدء المتسلسلة بمقدار واحد}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, z^{2n-1}}{(2n-1)!} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, z^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{n\to n+1}$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, z^{2n+1}}{(2n+1)!} = -sinz$$

بشكل مماثل يمكن إثبات أن $(sinz)' = cosz$ (يترك للقارئ)

تمرين : أثبت صحة المساوتين التاليتين: (وظيفة)

$$cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad , \quad sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

الحل :

من تعريف التابع الأسي العقدي لدينا :

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

نستبدل كل z بـ iz :

$$e^{iz}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!}=1+iz-\frac{z^2}{2!}-i\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots+\frac{(iz)^n}{n!}+\cdots$$

بنفس الأسلوب ،نضع $-iz$

$$e^{-iz}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-iz)^n}{n!}=1-iz-\frac{z^2}{2}+\frac{iz^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots+\frac{(-iz)^n}{n!}+\cdots$$

♦بجمع المتسلسلتين الناتجتين طرفاً لطرف :

$$e^{iz}+e^{-iz}=2-2\frac{z^2}{2!}+2\frac{z^4}{4!}+\cdots+2(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\cdots$$

بقسمة الطرفين على 2 :

$$\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}=\cos(z)$$

♦ بطرح المتسلسلتين الناتجتين سابقاً:

$$e^{iz}-e^{-iz}=2i\,z-2i\frac{z^3}{3!}+2i\frac{z^5}{5!}+\cdots+2i\,(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$$

و بالتقسيم على $2i$:

$$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots+\ (-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$=sinz$$

المطابقات المثلثية: في الحقيقة إن معظم المتطابقات المثلثية الحقيقية تبقى صحيحة على $\mathbb{C}$ و نذكر منها

المطابقات التالية :

$1)\ \sin^2 z + \cos^2 z = 1$

$2)\ \cos(z_1 \pm z_2) = \cos(z_1)\cos(z_2) \mp \sin(z_1)\sin(z_2)$

$3)\ \sin(z_1 \pm z_2) = \sin(z_1)\cos(z_2) \pm \sin(z_2)\cos(z_1)$

$4)\ \sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z)$

$5)\ \cos(2z) = \cos^2 z - \sin^2 z = 2\cos^2 z - 1 = 1 - 2\sin^2 z$

و سنثبت لكم أصدقائي بعض هذه المطابقات (وظيفة)

المطابقة (1): $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

وجدنا سابقاً أن : $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ و بالتالي يكون :

$$\sin^2 z + \cos^2 z = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{e^{2iz} - 2e^{iz}e^{-iz} + e^{-2iz}}{-4} + \frac{e^{2iz} + 2e^{iz}e^{-iz} + e^{-2iz}}{4}$$

$$= \frac{-e^{2iz} + 2 - e^{-2iz} + e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

المطابقة (2): $\cos(z_1 + z_2) = \cos(z_1)\cos(z_2) - \sin(z_1)\sin(z_2)$:

$$\cos(z_1)\cos(z_2) = \frac{e^{iz_1} + e^{-iz_1}}{2} \cdot \frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2}$$

$$= \frac{e^{iz_1+iz_2} + e^{iz_1-iz_2} + e^{-iz_1+iz_2} + e^{-iz_1-iz_2}}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos(z_1)\cos(z_2) = \frac{e^{i(z_1+z_2)} + e^{i(z_1-z_2)} + e^{-i(z_1-z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}}{4}} \dots (1)$$

و بشكل مماثل :

$$sin(z_1)\,sin(z_2)=\frac{e^{iz_1}-e^{-iz_1}}{2i}.\frac{e^{iz_2}-e^{-iz_2}}{2i}$$
$$=\frac{e^{iz_1+iz_2}-e^{iz_1-iz_2}-e^{-iz_1+iz_2}+e^{-iz_1-iz_2}}{-4}$$

$$\Rightarrow \boxed{sin(z_1)\,sin(z_2)=-\frac{e^{i(z_1+z_2)}-e^{i(z_1-z_2)}-e^{-i(z_1-z_2)}+e^{-i(z_1+z_2)}}{4}}\ \dots(2)$$

بطرح (2) من (1) :

$$\cos(z_1)\cos(z_2)-\sin(z_1)\sin(z_2)=\frac{2e^{i(z_1+z_2)}+2e^{-i(z_1+z_2)}}{4}$$
$$=\frac{e^{i(z_1+z_2)}+e^{-i(z_1+z_2)}}{2}=\cos(z_1+z_2)$$

و بنفس الأسلوب تماماً نثبت صحة المطابقة (3)

المطابقة (4) $\sin(2z)=2sinz\ cosz$

في الحقيقة يمكن إثباتها باتباع نفس الأسلوب السابق و لكن سنورد طريقة أسهل..و ذلك بالاعتماد على المطابقة (3) بحيث نأخذ $z_2=z\ \ \&\ \ z_1=z$ و عليه يكون :

$$sin(z+z)=sinz\ cosz+sinz\ cosz$$
$$\Longrightarrow sin(2z)=2sinz\ cosz$$

(حاول بنفس الأسلوب إثبات المطابقة (5))

تمرين : أثبت أن كلاً من التابعين $sinz\ ,cosz$ دوريان و دور كل منهما 2π .

الحل:

يأتي الإثبات مباشرة لكون التابع الأسي العقدي تابع دوري و دوره 2π .

إيجاد القسم الحقيقي و التخيلي للتابع $cosz$:

لنأخذ $z = x + iy$:

$$cos(z) = cos(x+iy) = cos(x)\,cos(iy) - sin(x)\,sin(iy)$$
$$= cos(x)\frac{e^{i(iy)} + e^{-i(iy)}}{2} - sin(x)\frac{e^{i(iy)} - e^{-i(iy)}}{2i}$$
$$= cos(x)\frac{e^{-y} + e^{y}}{2} - sin(x)\frac{e^{-y} - e^{y}}{2i}$$

بضرب بسط و مقام الحد الأخير بـ i :

$$cos(z) = cos(x)\frac{e^{y} + e^{-y}}{2} - i\,sin(x)\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}$$
$$cos(z) = cos(x)\,ch(y) - i\;sin(x)\,sh(y)$$

و بالتالي يكون :

$$Re(cosz) = u(x,y) = cosx\;chy$$
$$IM(cosz) = v(x,y) = -sinx\;shy$$

فكرة هامة : نلاحظ أن كل من القسم الحقيقي و التخيلي قابلان للاشتقاق التام و يحققان معادلتي كوشي ريمان :

$$u_x(x,y) = -sinx\;chy = v_y(x,y)$$
$$u_y(x,y) = cosx\;shy = -v_x(x,y)$$

و بالتالي هو تحليلي على C

(بنفس الأسلوب نعيد الدراسة من أجل تابع $sinz$)

حل معادلة مثلثية :

المعادلة $sinz = a$ حيث a ثابت عقدي فإننا لحلها نقوم بما يلي :

$$sinz = a \Rightarrow \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = a$$
$$\Rightarrow e^{iz} - e^{-iz} = 2ia$$
$$\Rightarrow e^{iz} - 2ia - e^{-iz} = 0$$

نضرب الطرفين بـ e^{iz} :

$$e^{2iz} - 2iae^{iz} - 1 = 0$$

لنضع $w = e^{iz}$ / $w^2 - 2ia\,w - 1 = 0$

ثم نحل هذه المعادلة باستخدام المميز Δ فينتج لدينا حلان : w_1, w_2 ، و بالتالي ترد المسألة إلى حل المعادلتين الأسيتين : $e^{iz} = w_2$, $e^{iz} = w_1$ ، و تكون مجموعة حلول المعادلة الأصلية هي اجتماع مجموعتي حلول المعادلتين الأسيتين السابقتين .

ملاحظة: $z = z_0 + 2\pi ki \Leftrightarrow e^z = e^{z_0}$

ملاحظة: $z = \pi - z_0 + 2\pi k$ أو $z = z_0 + 2\pi k \Leftrightarrow sin\, z = sin\, z_0$

ملاحظة: $z = -z_0 + 2\pi k$ أو $z = z_0 + 2\pi k \Leftrightarrow cos\, z = cos\, z_0$

انتهت المحاضرة

إعداد: منى شغل – أحمد أبو النوت – نذير تيناوي