نظري

◄ دكتور المادة: هدى شماط

◄المحاضرة: الخامسة عنوان المحاضرة : الفضاءات

سنتعرف في هذه المحاضرة على :

١- نهاية الدوال الحقيقية لعدة متغيرات

٢- مجموع وجداء وقسمة دوال حقيقية لعدة متغيرات

٣-مبرهنات وبعض الأمثلة

٤- استمرار الدوال الحقيقية لعدة متغيرات

نهاية الدوال الحقيقية لعدة متغيرات

تعريف: لتكن f دالة معرفة على مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^n$ ومستقرها $\mathbb{R}$

$$f : S \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

ولتكن x_0 نقطة حدية(تجمع أو تراكم) من S أي $x_0 \in \underbrace{S'}_{\text{رمز الحدية}}$ نقول إن نهاية الدالة f تساوي إلى A

عندما x تسعى إلى x_0 إذا تحقق الشرط التالي :

$$\forall \varepsilon > 0 \ ; \ \exists \delta_{(\varepsilon)} > 0 \ : \ 0 < \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

ملاحظة : (الكتابة $0 < \|x - x_0\|$ تكافئ أن $x \neq x_0$ كنايةً عن أنها نقطة حدية).

تعريف آخر (باستخدام المتتاليات):

لتكن لدينا دالة حقيقة معرفة $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ولتكن $(x_0 \in S')$ (نقطة حدية لـ S) عندئذٍ:

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

كل متتالية $\{x_m\}_{m \in N}$ من عناصر المنطلق S (بحيث عناصرها مختلفة عن x_0) ومتقاربة من x_0 يقابلها متتالية $\{f(x_m)\}$ من $\mathbb{R}$ ومتقاربة من A

مجموع وجداء وقسمة دوال حقيقية لعدة متغيرات

لنأخذ:

مجموعة جزئة s : دالة $f: S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

مجموعة جزئة T : دالة $g: T \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

١- حاصل جمع الدالتين

$$f+g: S \cap T \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

٢- حاص ضرب الدالتين

$$f\,.g: S \cap T \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto (f.g)(x) = f(x).g(x)$$

٣- حاصل قسمة الدالتين

$$3)\ \frac{f}{g}: S \cap T \backslash \{x: g(x) = 0\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

مبرهنة:

لتكن $f: S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ و $g: T \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ، ولتكن x_0 نقطة حدية لـ $S \cap T$ ، $x_0 \in S \cap T$ ،

فإذا كان $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$ ، $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$

عندئذ : $\lim\limits_{x\to x_0} (f+g)(x) = A + B$

الإثبات: بما أن $lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0, \frac{\varepsilon}{2} > 0, \exists \delta_1 > 0: \ 0 < ||x - x_0|| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = A$$
$$\forall \varepsilon > 0, \frac{\varepsilon}{2} > 0, \exists \delta_2 > 0: \ 0 < ||x - x_0|| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} g(x) = B$$

بجمع المتراجحتين السابقتين:

$$|f(x) - A + g(x) - B| \le |f(x) - A| + |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
$$\Rightarrow |f(x) - A + g(x) - B| < \varepsilon$$
$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists \delta = min(\delta_1, \delta_2) > 0\,, 0 < \|x - x_0\| < \delta$$
$$\Rightarrow |(f+g)(x) - (A+B)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} (f+g) = A + B$$

مبرهنة:

لتكن $g: T \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ، لتكن x_0 نقطة حدية لـT، ولنفرض $lim_{x \to x_0} g(x) = B$ عندئذ:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{B} \quad , \qquad (\, g(x) \neq 0 \, , B \neq 0)$$

الإثبات:

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = B \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,, 0 < \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |g(x) - B| < \varepsilon$$

الآن نأخذ:

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| = \left|\frac{B - g(x)}{g(x).B}\right| < \frac{\varepsilon}{|g(x)|.|B|} \ldots \ldots \ldots (*)$$

و ذلك بسبب ما يلي :

$$|g(x) - B| < \varepsilon \Rightarrow |-[g(x) - B]| < \varepsilon \Rightarrow |B - g(x)| < \varepsilon$$

أيضاً لدينا :

$$|B| = |B - g(x) + g(x)| \leq |B - g(x)| + |g(x)| < \varepsilon + |g(x)|$$
$$\Rightarrow |B| - \varepsilon < |g(x)|$$
$$\underset{\text{نقلب}}{\Rightarrow} \frac{1}{|B| - \varepsilon} > \frac{1}{|g(x)|} \Rightarrow \frac{1}{|g(x)|} < \frac{1}{|B| - \varepsilon}$$

نعوض في (*) فنجد أن:

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| < \frac{\varepsilon}{|B|(|B| - \varepsilon)}$$

وبما أن ε عدد موجب اختياري ، نختار $\varepsilon = \frac{|B|}{2} \ldots (**)$ بالتعويض نجد:

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| < \frac{\frac{|B|}{2}}{|B|\left[|B| - \frac{|B|}{2}\right]} < \frac{\frac{|B|}{2}}{|B|\left[\frac{|B|}{2}\right]} = \frac{1}{|B|} \underset{\text{حسب}(**)}{=} \frac{1}{2\varepsilon}$$

ومنه:

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < \|x - x_0\| < \delta \,, \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| < \frac{1}{2\varepsilon}$$
$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{B}$$

تمرين:

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$f(x,y)=\begin{cases} 0 & : (x,y)=(0,0) \\ \dfrac{[x^2+(y-2)^2+1]^{\frac{1}{2}}-1}{x^2+(y-2)^2} & : (x,y)\neq(0,0) \end{cases}$$

أثبت حسب التعريف أن:

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} f(x,y)=\frac{1}{2}$$

الحل: نريد اثبات أن :

$$\forall\, \varepsilon>0, \exists \delta>0 : 0<\|(x,y)-(0,2)\|<\delta \Rightarrow \left|f(x,y)-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$$

لنفرض أن $x^2+(y-2)^2=a$ (لسهولة التعامل مع هذا المقدار) وبالتعويض بـ $f(x,y)$ نجد:

$$f(x,y)=\frac{\sqrt{a+1}-1}{a} \quad ; \quad (x,y)\neq(0,2)$$

كما نلاحظ أن $(0,2)$ نقطة حدية لـ f.

بالتعويض في $\left|f(x,y)-\frac{1}{2}\right|$ نجد أن :

$$\left|f(x,y)-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{\sqrt{a+1}-1}{a}-\frac{1}{2}\right|$$

بتوحيد المقامات:

$$\left|f(x,y)-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{2\sqrt{a+1}-2-a}{2a}\right|=\left|\frac{2\sqrt{a+1}-1-1-a}{2a}\right|$$

$$=\left|\frac{-(1+a)+2\sqrt{a+1}-1}{2a}\right|=\left|\frac{-\left(\sqrt{a+1}-1\right)^2}{2a}\right|$$

نضرب البسط والمقام بمرافق البسط $\left(\sqrt{a+1}+1\right)^2$ ومنه:

$$\left|f(x,y)-\frac{1}{2}\right|=\frac{(1+a-1)^2}{2a\left(\sqrt{a+1}+1\right)^2}=\frac{a^2}{2a\left(\sqrt{a+1}+1\right)^2}$$

$$=\frac{a}{2\left(\sqrt{a+1}+1\right)^2}<\frac{a}{2}<\frac{\delta^2}{2}=\varepsilon$$

نلاحظ أن $\frac{\delta^2}{2} < \frac{a}{2}$ لانه :

$$||(x,y)-(0,2)|| = ||(x-0,y-2)|| = \sqrt{x^2+(y-2)^2} < \delta$$
$$\Rightarrow x^2+(y-2)^2 < \delta^2$$

ونحن فرضنا سابقاً أن $x^2+(y-2)^2 = a$ ومنه:

$$\left|f(x,y)-\frac{1}{2}\right| < \frac{a}{2} < \frac{\delta^2}{2} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0, \exists \delta = \sqrt{2\varepsilon} : 0 < ||(x,y)-(0,2)|| < \delta \Rightarrow \left|f(x,y)-\frac{1}{2}\right| < \varepsilon$$

أي:

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} f(x,y) = \frac{1}{2}$$

مثال :

$$\mathrm{f}:\ \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,y) \longmapsto f(x,y) = \frac{sinxy}{x^2+y^2}$$

اثبت أنه لا توجد نهاية للدالة $f(x,y)$ في النقطة $(0,0)$

الحل : **فكرة الحل :** نفرض أن $x = y^2$ وأن $\left(\frac{1}{n^2},\frac{1}{n}\right)$

نأخذ المتتالية $\left\{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$

$$f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = \frac{sin\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$$

نأخذ متتالية أخرى $\left\{\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right)\right\} \longrightarrow (0,0)$

$$f\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right) = \frac{sin\frac{2}{n^2}}{\frac{5}{n^2}} = \frac{sin\frac{2}{n^2}}{\frac{5}{2}\frac{2}{n^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{5}$$

وجدنا متتاليتين من المنطلق متقاربتين من (0,0) إلا أن صورتيهما متقاربتين من عددين مختلفين ،فالنهاية المطلوبة غير موجودة.

استمرار الدوال الحقيقية لعدة متغيرات :

لتكن $f: S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ولتكن $x_0 \in S$ عندئذٍ نقول عن f إنها مستمرة عند x_0 $\Leftrightarrow$
$\forall\, \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, ||x - x_0|| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
f مستمرة على S $\Leftrightarrow$ f مستمرة في كل نقطة من نقاط S.

مبرهنة :

ليكن $f: S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ولتكن $x_0 \in S$، عندها تكون f مستمرة في x_0 إذا وفقط إذا:

١) قابل كل جوار V لـ $f(x_0)$ من $\mathbb{R}$ جوار U لـ $x_0 \ni U$ في $\mathbb{R}^n$ وبحيث:
$\forall x \in S \cap U$ فإن $f(x) \in V$.

انتهت المحاضرة

إن ما يسعى إليه الانسان السامي يكمن في ذاته

أما الدنيء فيسعى لما لدى الآخرين..W

إعداد: كمال الرفاعي_محمد أنس القزاز_سارة شهاب