◄ دكتور المادة: جبران جبران

◄ المحاضرة: الثالثة

عنوان المحاضرة: البيان الجزئي

بسم الله وبالله المستعان ....اهلا بكم وملائي في محاضرتنا الثالثة لمقرر نظرية البيان والتي سنتناول بها بعض التعاريف الهامة والتمارين الامتحانية .....بداية مع حل تمرين من افكار المحاضرة السابقة

تمرين (1) : حدد قيم x بحيث تكون المتتالية التالية بيانية

$$x,8,7,6,6,5,1,1,1$$

بحيث $x \in \mathbb{N}$: $1 \le x \le 5$

الحل

يجب أن يكون عدد الأعداد الفردية في المتتالية المعطاة زوجي ، ولدينا في هذه المتتالية خمسة أعداد فردية فقط ، إذاً يجب أن يكون x عدد فردي ليصبح مجموع الأعداد الفردية زوجي ، وإن الأعداد الفردية لـ x هي $[1,3,5]$ ضمن المجال المعطى $1 \le x \le 5$

أولاً : من أجل $x = 1$ لنختار المتتالية التالية :

$$S : 8,7,6,6,5,1,1,1,1$$

إن الرأس ذو القيمة الكبرى في S هو 8 إذاً يرتبط مع 8 رؤوس غيره وهي $\{7,6,6,5,1,1,1,1\}$ ونطرح من هذه الأعداد واحد فتظهر لدينا المتتالية S_1

$$S_1 : 6,5,5,4,0,0,0,0$$

إن الرأس ذو القيمة الكبرى في S_1 هو 6 إذاً يرتبط ب 6 رؤوس غيره وهي $\{5,5,4,0,0,0,\}$ نطرح منها واحد فتصبح :

$$S_2 : 4,4,3,-1,-1,-1,-1,0$$

إذاً المتتالية المختارة ليست متتالية بيانية لظهور الأعداد السالبة في المتتالية S_2
((لا يوجد في البيان درجة رأس سالبة))

ثانياً : من أجل $x = 3$ لنختار المتتالية التالية :

$$S : 8,7,6,6,5,3,1,1,1$$

بنفس الخطوات السابقة نحصل على المتتالية :

$$S_1 : 6,5,5,4,2,0,0,0$$

ومنه :

$$S_2 : 4,4,3,1,-1,-1,0$$

إذاً المتتالية S ليست بيانية بسبب ظهور الأعداد السالبة

ثالثاً : من أجل $x = 5$ تترك للطالب " وتظهر النتيجة ذاتها "

أي S ليست متتالية بيانية في جميع حالات x

تمرين (2) : حدد قيم x التي من أجلها تكون المتتالية التالية بيانية

$$S : x,8,7,6,6,5,4,4,4$$

بحيث $x \in \mathrm{N}$: $1 \leq x \leq 5$

أولاً : إن عدد الأعداد الفردية في المتتالية المعطاة زوجي وبالتالي تحقق الشرط ومنه لنختار قيمة x زوجية ، وإن قيم لـ x الزوجية في هذا المجال $1 \leq x \leq 5$ هي $[2,4]$

ثانياً : لنفرض $x = 2$ لنختار المتتالية :

$$S : 8,7,6,6,5,4,4,4,2$$

إن الرأس ذو القيمة الكبرى في S هو 8 إذاً يرتبط بـ 8 رؤوس غيره وهي $\{7,6,6,5,4,4,4,2\}$ نطرح منها واحد فنحصل على :

$$S_1 : 6,5,5,4,3,3,3,1$$

بالطريقة ذاتها نجد :

$$S_2 : 4,4,3,2,2,2,1$$

بالطريقة ذاتها نجد :

$$S_3 : 3,2,1,1,2,1$$

نرتب المتتالية ترتيب تنازلي :

$$S'_3 : 3,2,2,1,1,1$$

وبالطريقة ذاتها نجد :

$$S_4 : 1,1,0,1,1$$

نرتب المتتالية ترتيب تنازلي :

$$S_4 : 1,1,1,1,0$$

بالطريقة ذاتها نجد :

$$S_5 : 0,1,1,0$$

نرتب المتتالية ترتيب تنازلي :

$$S_5' : 1,1,0,0$$

وبالطريقة ذاتها نجد :

$$S_6 : 0,0,0$$

وبالتالي S_6 بيانية ومنه المتتالية المعطاة هي بيانية من أجل $x = 2$ ويوجد ثلاث رؤوس منعزلة .

وظيفة : هل المتتالية بيانية من أجل $x = 4$ الحل بالطريقة ذاتها السابقة .
لم نقوم بحلها لعدم إطالة المحاضرة ((تترك للطالب))

البيانات المترابطة (المتصلة) $(connected\ graphs)$

الطريق $(walk)$

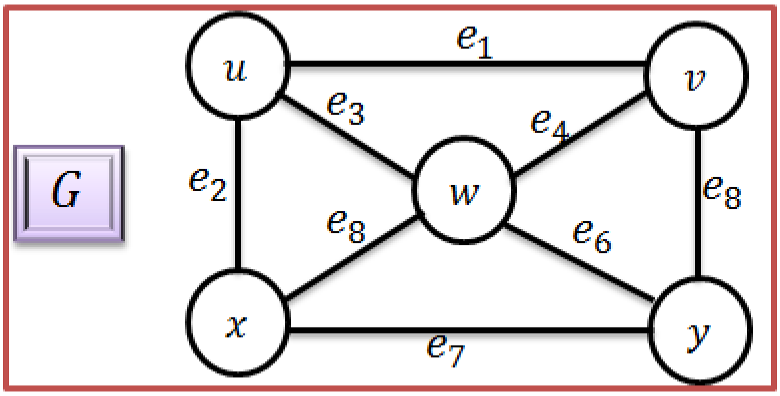
تعريف : نقول عن البيان $G(V,E)$ أنه طريق إذا وجد متتالية متناوبة من العقد والأضلاع وليكن

$$W : v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, \dots \dots e_n, v_n \quad \forall \;\; n \geq 2$$

w متتلية متناوبة ((أي مرة رأس ومرة ضلع)) ، وإن هذه المتتالية تبدأ برأس v_0 وتنتهي بالرأس v_n
يعرف الضلع $i = 1,2, \dots . n$; $e_i = v_i v_{i-1}$ حيث e_i الضلع بين عقدتي المتتالية .

ملاحظة : قد تتكرر الرؤوس وقد تتكرر الأضلاع في الطريق .

مثال : ليكن G البيان الممثل بالشكل التالي :



فإن الطريق يكون :

$$W_1 \;:\; u, e_1, v, e_5, y, e_7, w, e_3, u, e_1, x$$

ومنه W_1 طريق .

ملاحظة : 1) يمكن استخراج اي طريق من ذلك البيان
2) يمكن التعبير عن الطريق برؤوس فقط

الطريق التافه : هو طريق مؤلف من رأس واحد " بدايته رأس ونهايته نفس الرأس "
يعبر عنه بالشكل : $W_1 \;:\; u$ ومنه W_1 طريق تافه .

طول الطريق : هو عدد أضلاع الطريق مع التكرار لعدد الأضلاع

إن طول الطريق W هو n ونكتب $W = n$ ، وطول الطريق W_1 من البيان G السابق هو $W_1 = 5$
نرمز للطريق $v_0 - v_n$ طريق بدايته العقدة v_0 ونهايته العقدة v_n

السلسلة $(Traip)$

نعرف السلسلة بأنها طريق لا يتكرر فيه أضلاع ((وقد تتكرر فيه الرؤوس))

وليكن لدينا الطريق $W_2 \;:\; x, u, v, y, w, u$ من البيان G المعطى بالمثال السابق .
نستطيع أن نقول عنه سلسلة ، وذلك لعدم تكرار الأضلاع فيه
وطول الطريق يكون $W_2 = 5$ لأن بين كل عقدتين من الطريق W_2 يوجد ضلع .
" **للتوضيح** " يمكن كتابة W_2 بالشكل :

$$W_2 \;:\; x, e_2, u, e_1, v, e_5, y, e_7, w, e_3, u$$

ومنه لم تتكرر الأضلاع إذاً W_2 سلسلة .

المسار $(Path)$

نعرف المسار على أنه الطريق الذي لا تتكرر فيه الأضلاع ولا تتكرر فيه الرؤوس .

نستطيع أن نقول عن الطريق من البيان G في المثال السابق

$$W_3 \;:\; x, u, v, y, w$$

أنه مسار لأنه لم تتكرر فيه الرؤوس ولا الأضلاع ، وطول الطريق هو $W_3 = 4$
لأن بين كل عقدتين من الطريق W_3 يوجد ضلع .

وبالتالي مما سبق يمكن استنتاج ما يلي :

$$\boxed{Path \Longrightarrow Traip \Longrightarrow Walk}$$

ولكن العكس ليس صحيح .

نظرية : كل طريق $u-v$ يحوي مسار $u-v$

أي يجب إثبات أن كل طريق بداية u و نهاية v يحوي مسار
((طريق لا يحوي على أضلاع متكررة ولا رؤوس متكررة)) بدايته u ونهايته v .

البرهان : ليكن W الطريق $u-v$

نميز حالتين

1- إذا كانت العقدتين متساويتين أي $u=v$ ((أي الطريق W يبدأ بـ u وينتهي بـ u))
عندئذ الطريق W $u-v$ يحوي المسار التافه $u-u$ ويكون $W: u$
(مؤلف من عقدة واحدة وطوله صفر)

2- إذا كانت العقدتين غير متساوتين $u \neq v$ نميز حالتين :

أ) إذا كان W الطريق $u-v$ " بدايته u ونهايته v " أي الطريق W لا يتكرر فيه الرؤوس
وبالتالي لا تتكرر فيه الأضلاع ومنه الطريق $u-v$ هو مسار

ب) يوجد تكرار في الرؤوس ليكن w الطريق

$$W: u=u_1, u_2, \dots, u_i, u_{i+1}, \dots, u_j, u_{j+1}, \dots u_n = v$$

بما أنه يوجد لدينا رؤوس مكرره فنفرض $u_j = u_i$
وبالتالي نحذف عقدة واحدة ولتكن u_i والعقد الموجودة بين u_j, u_i
ومنه ينتج الطريق

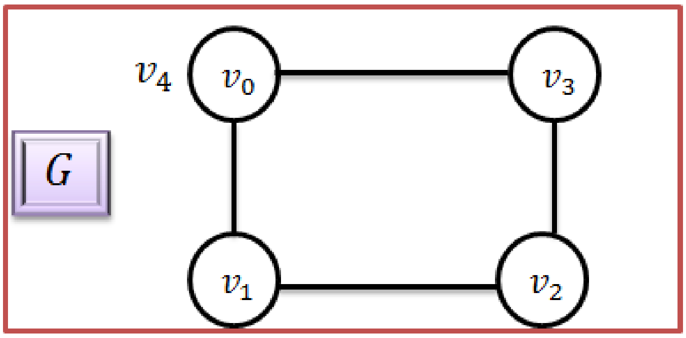
$$W_1: u=u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_j, u_{j+1}, \dots u_n = v$$

بالتالي حصلنا على الطريق الجديد $u-v$ طوله أصغر من طول W الأصلي
وبمتابعة الخوارزمية ذاتها حتى نحصل في النهاية على مسار $u-v$ او مسار تافه وبالتالي يتم المطلوب

الحلقة $(cycle)$

هي طريق $v_0, v_1, \dots, v_n$ من الرؤوس المختلفة مثنى مثنى بحيث $(n \geq 3)$ ، وبما أن الرؤوس مختلفة فلا يوجد تكرار لها وبالتالي لا يوجد تكرار للأضلاع ، ويمكن التعبير عن الحلقة بأنها مسار مغلق ويكون $v_0 = v_n$ أي " رأس البداية يساوي رأس النهاية "

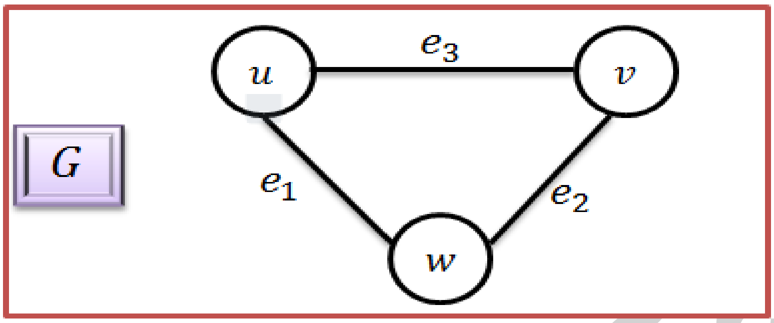
مثال : ليكن لدينا البيان G التالي :



ومنه $v_0 = v_4$ ، هنا ليس تكرار للعقدة v_0 وإنما اسم اخر لها

$$C: v_0, v_1, v_2, v_3, v_0$$

مثال : ليكن لدينا البيان G



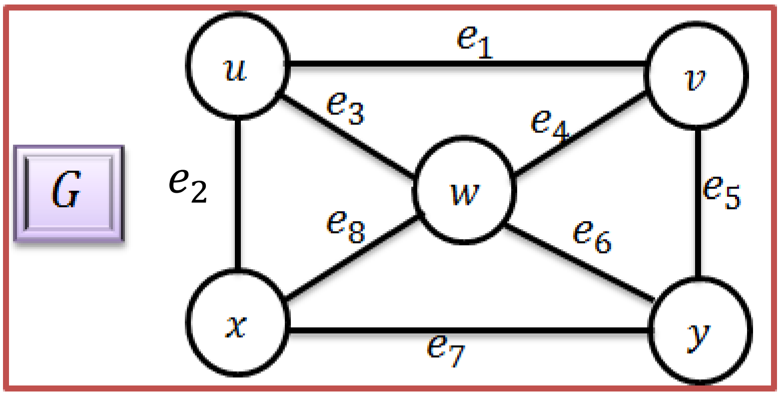
$$C: u, w, v, u$$

الحلقة هي عبارة عن " مسار دائري مغلق " من البيان G

الدائرة $(circul)$

هي طريق يمكن أن يتكرر فيه الرؤوس ولا يتكرر فيه الأضلاع

ليكن لدينا البيان $G(V, E)$ التالي :



نعرف الدائرة C بأنها المتتالية :

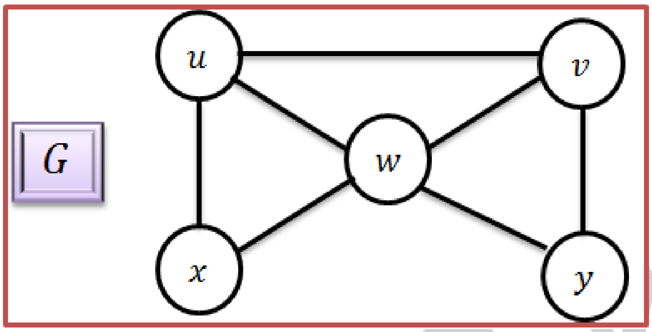
$$C: \ x, u, v, w, x, y, v$$

نلاحظ بأنه " تكررت الرؤوس ولم تتكرر الأضلاع "

ليكن u, v رأسين من البيان G ، نقول عن u أنه مرتبط (متصل) في v إذا وجد في G مسار $u - v$ " لا يمكن تكرار الرؤوس وبالتالي لا يمكن تكرار الأضلاع "

البيان المترابط

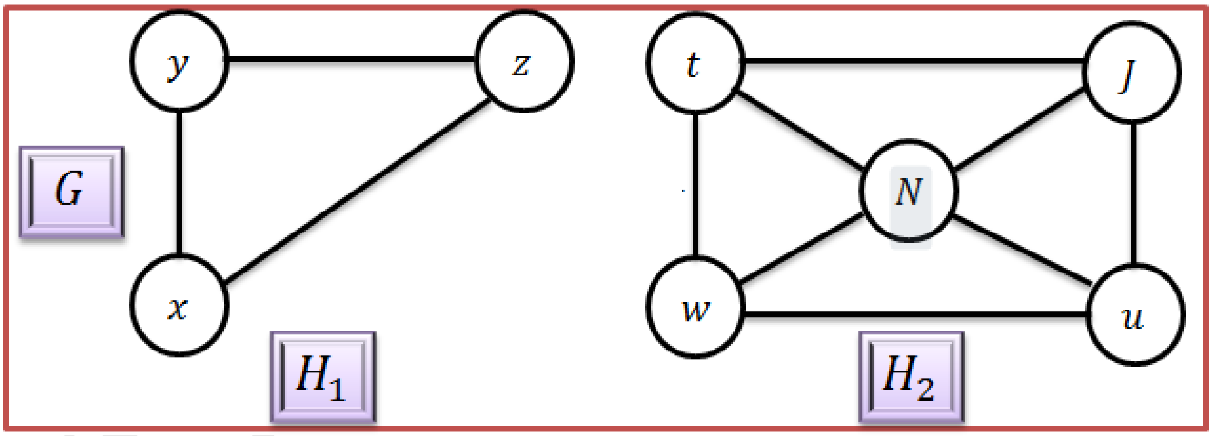
تعريف : نقول عن البيان G أنه مترابط إذا كان أي رأسين u, v من رؤوسه مرتبطين ومتصلين ، وإلا ندعو G غيرمترابط " أي نجد رأسين على الأقل لا يتصل بينهما أي مسار "
بالعودة إلى المثال السابق $G(V, E)$



نلاحظ أن : البيان G مترابط لأن جميع رؤوسه متصلة ومترابطة .

تعريف المركبة : نقول عن البيان الجزئي H من G أنه مركبة لـ G إذا كان H أكبر بيان جزئي مترابط في G .

مثال : يبين تعريف المركبة والترابط ، وليكن لدينا البيان $G(V, E)$



نلاحظ أنه يوجد في G مركبتين H_1 , H_2

H_1 : أكبر بيان جزئي مترابط لكنه لا يشمل G
H_2 : أكبر بيان جزئي مترابط ولكنه لا يشمل G
ولكن البيان G كاملاً ليس بياناً مترابطاً ، ونرمز لعدد مركبات البيان G بـ $K(G)$

$$G \text{ مترابط } \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{شرط الترابط}} K(G) = 1$$

وفي هذا المثال يكون $K(G) = 2$ أي أن البيان ليس مترابط .

خاصة : كل طريق $u - w$ يحوي مسار $u - w$ إذاً هو علاقة تكافؤ .

علاقة التكافؤ على مجموعة : نعرف علاقة التكافؤ R على مجموعة العقد V .

$$\forall\, u, v \in V$$

u مرتبطة مع $v \Leftrightarrow uRv \Leftrightarrow$ وجد مسار $u - v$ في G

سؤال : أثبت أن R علاقة تكافؤ

أي يجب أثبات أنها " علاقة انعكاسية وتناظرية ومتعدية "

علاقة انعكاسية

$$\forall\, u \in V$$

$uRu \Leftrightarrow$ أي u مرتبط مع u و هذا محقق لأنه يوجد مسار تافه يصل بين u, u

علاقة تناظرية

$$\forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$$

$uRv \Leftrightarrow u$ مرتبطة مع $v \Leftrightarrow$ يوجد مسار $v - u$ يصل بين u, v ، ومنه R علاقة تناظرية .

علاقة متعدية

$$\forall\, u, v, w \in V$$

$$\begin{cases} uRw \\ wRv \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u \text{ مرتبطة مع } w \\ w \text{ مرتبطة مع } v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{يوجد مسار } \mathrm{u - w} \text{ يصل بين } u, w \\ \text{يوجد مسار } \mathrm{w - v} \text{ يصل بين } v, w \end{cases}$$

هذا يقتضي أنه يوجد وبشكل عام طريق $u - v$ يصل بين u, v وبالاعتماد على المبرهنة السابقة " كل طريق $u - v$ يحوي مسار $u - v$ نحصل على مسار $u - v$ ومنه uRv " u مرتبط مع v

إذاً مما سبق نجد R علاقة تكافؤ على مجموعة العقد V .

انتهت المحاضرة

هناك قوم إذا مس النعال وجوهِهم شكت النعال بأي ذنب تصفع

إعداد : فطوم مرعي ** محمد علي فليون