2018 / ٤ / ١٩

المحاضرة الرابعة

لتطبيق تقنية الحل يجب أن تكون صيغ الصيغ بشكل العطف النظامي

التحويل إلى شكل العطف النظامي :

خطوات التحويل :

١ـ حذف الاقتضاء .

مثال : $\forall x: person(x) \Rightarrow Death(x) \equiv$

الحل : $\forall x: \neg person(x) \vee Death(x)$

٢ـ تطبيق قانون دومرغان وقانون النفي المزدوج .

مثال : $\neg(\forall x: person(x) \Rightarrow Death(x)) \equiv$

الحل : $\neg(\forall x: \neg person(x) \vee Death(x)) \equiv$

$\exists x: person(x) \wedge \neg Death(x)$

٣ـ اعادة تسمية المتحولات .

أي يجب اعادة تسمية المتحولات الواقعة في مجال الحكم ($\exists$ $\forall$) بحيث يكون لكل حكم متغيراته الخاصة

مثال : $\forall x [\neg p(x) \vee \exists x\ Q(x)] \equiv$

الحكم الأقرب له

الحل : $\forall x [\neg p(x) \vee \exists y\ Q(y)]$

٤ـ حذف حكمات الوجود (إن وجدت)

وهنا نميز حالتين :

١ـ اذا لم يقع متحول حكم الوجود ضمن نطاق حكم شمول آخر فإننا نحذف حكم الوجود و نستبدل متحوله بثابت غير موجود في الصيغة .

موشرط تكون في بداية السطر
أي أن تكون في بداية الاسنادية

*مثال : $\exists x: p(x) \wedge Q(x) \equiv$

الحل : $p(A) \wedge Q(A)$

*مثال : $\exists x \exists y: p(x) \wedge Q(y,x) \equiv$

الحل : $p(A) \wedge Q(B,A)$

*مثال : $\forall x: [\neg p(x)] \wedge \exists y: Q(y)$

الحل : $\forall x: [\neg p(x)] \wedge Q(A)$

٤- اذا وقع متحول محكم الوجود ضمن مجال متحولات محكمات الشمول ($\forall$) فإننا نحذف محكم الوجود ونستبدل متحول بتابع لمتحولات محكمات الشمول التي وضع ضمن مجالها وهذا التابع يجب أن لا يكون موجود في الصيغة.

*مثال: $\forall x \exists y : h(x) \wedge h(x,y) \equiv$

الحل: $\forall x \; h(x) \wedge h(x, f(x))$

*مثال: $\exists y \; \forall x : h(x) \wedge h(x,y) \equiv$ ليس ضمن نطاق مدامعين

الحل: $\forall x : h(x) \wedge h(x, A)$ فنعوضه ثابت

*مثال: $\forall x \; \forall y \; \exists z, h(x) \wedge L(x,y,z) \equiv$

الحل: $\forall x \; \forall y : h(x) \wedge L(x, y, f(x,y))$

*مثال: $\forall x : [\neg p(x) \vee \exists x \, Q(x)] \equiv$

الحل: $\forall x : [\neg p(x) \vee Q(f(x))]$

*مثال: $\forall x \; \forall z : [\neg p(x) \vee \exists y \; Q(y)]$

الحل: $\forall x \; \forall z : [\neg p(x) \vee Q(f(x,z))]$

٥- وضع محكمات الشمول في المقدمة

مثال: $\forall x : [\neg p(x) \vee [\forall y : [\neg p(y) \vee p(f(x), y)] \wedge [Q(x, f(y)) \wedge \neg p(h(x))]]]$

الحل: $\forall x \; \forall y : [\neg p(x) \vee [[\neg p(y) \vee p(f(x), y)] \wedge [Q(x, f(y)) \wedge \neg p(h(x))]]]$

٦- توزيع $\vee$ على $\wedge$

مثال: $\forall x \; \forall y : [\neg p(x) \vee [[\neg p(y) \vee p(f(x), y)] \wedge [Q(x, f(y)) \wedge \neg p(h(x))]]]$

الحل: $\forall x \; \forall y : [[\neg p(x) \vee \neg p(y) \vee p(f(x), y)] \wedge [\neg p(x) \vee Q(x, f(y))] \wedge$
$[\neg p(x) \vee \neg p(h(x))]]$

٧- حذف المحكمات الشمولية.

مثال: $\forall x \; \forall y : [[\neg p(x) \vee \neg p(y) \vee p(f(x), y)] \wedge [\neg p(x) \vee Q(x, f(y))] \wedge$
$[\neg p(x) \vee \neg p(h(x))]]$

الحل: $[\neg p(x) \vee \neg p(y) \vee p(f(x), y)] \wedge [\neg p(x) \vee Q(x, f(y))] \wedge$
$[\neg p(x) \vee \neg p(h(x))]$

ملاحظة: لو كنا في المسائل عندئذ عندما نحصل على شكل العطف النظامي نقوم بمايلي: نحذف الـ $\wedge$ فتصبح لدينا الصيغ التالية:

مثال :

$$[\neg p(x) \vee \neg p(y) \vee p(f(x),y)] \wedge [\neg p(x) \vee Q(x,f(y))] \wedge [\neg p(x) \vee \neg p(h(x))]$$

الحل :

$\neg p(x) \vee \neg p(y) \vee p(y) \vee p(f(x),y)$

$\neg p(x) \vee Q(x,f(y))$

$\neg p(x) \vee \neg p(h(x))$

ثم نعطي لكل صيغة أسماء متحولات مختلفة عن الصيغ الأخرى.

مثال :

$\neg p(x) \vee \neg p(y) \vee p(f(x),y)$

$\neg p(x) \vee Q(x,f(y))$

$\neg p(x) \vee \neg p(h(x))$

الحل :

$\neg p(x) \vee \neg p(y) \vee p(f(x),y)$

$\neg p(x_1) \vee Q(x_1,f(y))$

$\neg p(x_2) \vee \neg p(h(x_2))$

فصل أول ٢٠١٤ / ٢٠١٥ :

حول إلى شكل العطف النظامي :

$$\forall x [(\exists y : p(y) \vee r(x,y)) \Rightarrow \exists y : h(x,y)]$$

الحل :

١- حذف الاقتضاء : $\forall x [\neg(\exists y : p(y) \vee r(x,y)) \vee \exists y\ h(x,y)] \equiv$

٢- نطبق دومورغان والنفي المزدوج : $\forall x [(\forall y : \neg p(y) \wedge \neg r(x,y)) \vee \exists y\ h(x,y)] \equiv$

٣- اعادة تسمية المتحولات : $\forall x [(\forall y : \neg p(y) \wedge \neg r(x,y)) \vee \exists z\ h(x,z)] \equiv$

٤- حذف مكممات الوجود : $\forall x [(\forall y : \neg p(y) \wedge \neg r(x,y)) \vee h(x,f(x,y))] \equiv$

٥- وضع مكممات الشمول في المقدمة : $\forall x \forall y [(\neg p(y) \wedge \neg r(x,y)) \vee h(x,f(x,y))] \equiv$

٦- توزيع $\vee$ على $\wedge$: $\forall x \forall y [(\neg p(y) \vee h(x,f(x,y))) \wedge (\neg r(x,y) \vee h(x,f(x,y)))] \equiv$

٧- حذف مكممات الشمول : $(\neg p(y) \vee h(x,f(x,y))) \wedge (\neg r(x,y) \vee h(x,f(x,y)))$

وقت يكون $\boxed{\vee}$ فنعتبر أن z ضمن متحول الشمول y بالصيغة الأولى أما $\boxed{\wedge}$ لا

فصل ثاني ٢٠١٥ / ٢٠١٦ :

$$[\forall x [p(x) \Rightarrow (\exists y\ \exists z\ R(y) \wedge Q(y,z))]] \wedge \neg(\forall x\ M(x))$$

الحل:

١- حذف الاقتضاء:

$[\forall x[\neg p(x) \vee (\exists y \exists z\, R(y) \wedge Q(y,z))]] \wedge \neg(\forall x\, M(x))$

٢- تطبيق دومرغان والنفي المزدوج

$[\forall x[\neg p(x) \vee (\exists y \exists z\, R(y) \wedge Q(y,z))]] \wedge \exists x\, \neg M(x)$

٣- اعادة تسمية المتحولات:

$[\forall x[\neg p(x) \vee (\exists y \exists z\, R(y) \wedge Q(y,z))]] \wedge \exists t\, \neg M(t)$

٤- حذف مكممات الوجود:

$[\forall x[\neg p(x) \vee (R(f(x)) \wedge Q(f(x), g(x)))]] \wedge \neg M(A)$

٥- وضع مكممات الشمول في المقدمة (وهي في المقدمة)

$[\forall x[\neg p(x) \vee (R(f(x)) \wedge Q(f(x), g(x)))]] \wedge \neg M(A)$

٦- توزيع $\vee$ على $\wedge$:

$\forall x\, [(\neg p(x) \vee R(f(x))) \wedge (\neg p(x) \vee Q(f(x), g(x)))] \wedge \neg M(A)$

٧- حذف مكممات الشمول:

$(\neg p(x) \vee R(f(x))) \wedge (\neg p(x) \vee Q(f(x), g(x))) \wedge \neg M(A)$

مثال:

$\exists z\, [g(z) \Rightarrow \forall x[\exists y[\neg t(y,z) \vee f(z)] \Rightarrow$
$\forall p\, [\neg h(p) \vee f(x)]]]$

الحل:

١- حذف الاقتضاء:

$\exists z[\neg g(z) \vee \forall x[\neg[\exists y[\neg t(y,z) \vee f(z)]] \vee \forall p[\neg h(p) \vee f(x)]]]$

٢- دومرغان والنفي المزدوج:

$\exists z[\neg g(z) \vee \forall x[\forall y\, t(y,z) \wedge \neg f(z)] \vee \forall p[\neg h(p) \vee f(x)]]$

٣- اعادة تسمية المتحولات: لا يوجد تشابه

$\exists z[\neg g(z) \vee \forall x[\forall y\, t(y,z) \wedge \neg f(z)] \vee \forall p[\neg h(p) \vee f(x)]]$

٤- حذف مكممات الوجود:

$\neg g(A) \vee \forall x[\forall y\, t(y,A) \wedge \neg f(A)] \vee \forall p\, [\neg h(p) \vee f(x)]]$

٥- وضع محكمات الشمول في المقدمة:

$\forall x\ \forall y\ \forall p\ [\neg g(A) \vee [t(y,A) \wedge \neg f(A)] \vee [\neg h(p) \vee f(x)]]$

٦- توزيع V على ∧:

$\forall x\ \forall y\ \forall p\ [(\neg g(A) \vee \neg h(p) \vee f(x) \vee t(y,A)) \wedge (\neg g(A) \vee \neg h(p) \vee f(x) \vee \neg f(A))]$

٧- حذف محكمات الشمول:

$(\neg g(A) \vee \neg h(p) \vee f(x) \vee t(y,A)) \wedge (\neg g(A) \vee \neg h(p) \vee f(x) \vee \neg f(A))$

مثال:

$\forall x\ \{[\forall y\ (\neg Animal(y) \vee Loves(x,y))] \Rightarrow [\exists y\ Loves(y,x)]\}$

الحل:

١- حذف الاقتضاء:

$\forall x\ \{\neg[\forall y\ (\neg Animal(y) \vee Loves(x,y))] \vee [\exists y\ Loves(y,x)]\}$

٢- دومرغان والنفي المزدوج:

$\forall x\ \{[\exists y\ (Animal(y) \wedge \neg loves(x,y))] \vee [\exists y\ loves(y,x)]\}$

٣- اعادة تسمية المتحولات:

$\forall x\ \{[\exists y\ (Animal(y) \wedge \neg loves(x,y))] \vee [\exists z\ Loves(z,x)]\}$

٤- حذف محكم الوجود:

$\forall x\ \{[Animal(f(x)) \wedge \neg loves(x,f(x))] \vee [Loves(g(x),x)]\}$

٥- وجود محكمات الشمول في المقدمة: (وهي في المقدمة)

$\forall x\ \{[Animal(f(x)) \wedge \neg loves(x,f(x))] \vee [Loves(g(x),x)]\}$

٦- توزيع V على ∧:

$\forall x\ \{[Animal(f(x)) \vee loves(g(x),x)] \wedge [\neg loves(x,f(x)) \vee loves(g(x),x)]\}$

٧- حذف محكمات الشمول:

$(Animal(f(x)) \vee loves(g(x),x)) \wedge (\neg loves(x,f(x)) \vee loves(g(x),x))$

مثال: لتكن لدينا مجموعة الحقائق للفيلة الثلاثة: oscar, clyde, sam

١- لون sam وردي

٢- لون clyde رمادي وهو حيب oscar

٣- لون oscar اما وردي أو رمادي وهو يحب sam

المطلوب: استخدام الحل بالنقض لاثبات أنه يوجد فيلاً رمادياً يحب فيلاً وردياً

استخدم الرموز التالية: pink(x) يعني أن x لونه وردي

Gray(x) يعني أن x لونه رمادي

loves(x,y) يعني أن x يحب y

الحل:

١- لون sam وردي

pink(sam)

٢- لون clyde رمادي وهو يحب oscar

Gray(clyde) ∧ Loves(clyde, oscar)

٣- لون oscar اما وردي أو رمادي وهو يحب sam

(pink(oscar) ∨ Gray(oscar)) ∧ Loves(oscar, sam)

المطلوب يوجد فيلاً رمادياً يحب فيلاً وردياً

$\exists x\ \exists y: Gray(x) \wedge pink(y) \wedge Loves(x,y)$

نفي المطلوب:

$\neg(\exists x\ \exists y: Gray(x) \wedge pink(y) \wedge Loves(x,y))$

$\forall x\ \forall y: \neg Gray(x) \vee \neg pink(y) \vee \neg loves(x,y)$

نحول كل الحقائق السابقة إلى شكل العطف النظامي:

$\boxed{pink(sam)}$

Gray(clyde) ∧ Loves(clyde, oscar)

ومنه: $\boxed{Gray(clyde)}$

$\boxed{Loves(clyde, oscar)}$

(pink(oscar) ∨ Gray(oscar)) ∧ loves(oscar, sam)

ومنه: $\boxed{pink(oscar) \vee Gray(oscar)}$

$\boxed{Loves(oscar, sam)}$

$\forall x\ \forall y: \neg Gray(x) \vee \neg pink(y) \vee \neg Loves(x,y)$

نحولها إلى شكل العطف النظامي:

$\neg Gray(x) \vee \neg pink(y) \vee \neg Loves(x,y)$

$\neg Gray(x) \vee \neg pink(y) \vee \neg Loves(x,y)$ $\quad$ $Loves(oscar, sam)$

$x/oscar$

y/sam

$\neg Gray(oscar) \vee \neg pink(sam)$ $\quad$ $pink(oscar) \vee Gray(oscar)$

$pink(oscar) \vee \neg pink(sam)$ $\quad$ $pink(sam)$

نستطيع تكرار العلاقات لنحصل على Null

$\neg Gray(x) \vee \neg pink(y) \vee \neg Loves(x,y)$ $\quad$ $pink(oscar)$

$y/oscar$

$\neg Gray(x) \vee \neg Loves(x, oscar)$ $\quad$ $Loves(clyde, oscar)$

$x/clyde$

$\neg Gray(clyde)$ $\quad$ $Gray(clyde)$

Null

فصل الثالث (التكميلي) ٢٠١٣/٢٠١٤ :

لتكن لدينا الحقائق التالية :

١- كل من ينجح في مادة الرياضيات ويربح اليانصيب هو شخص سعيد

٢- كل شخص محظوظ يربح اليانصيب

٣- كل شخص محظوظ ينجح في كل المواد

٤- رامي شخص محظوظ

استخدم الحل بالتفنيد لاثبات أن رامي شخص سعيد

$Pass(x,y)$ يعني أن x ينجح في المادة y

$Win(x, lottery)$ يعني أن x يربح اليانصيب

Happy(x) .... يعني أنه x شخص سعيد

Luck(x) .... يعني أنه x شخص محظوظ

الحل :

١ـ كل من ينجح في مادة الرياضيات ويربح اليانصيب هو شخص سعيد

$\forall x: pass(x, math) \land Win(x, lottery) \Rightarrow happy(x)$

نحولها إلى شكل العطف النظامي :

$\forall x: \neg pass(x, math) \lor \neg Win(x, Lottery) \lor happy(x)$

$\boxed{\neg pass(x, math) \lor \neg win(x, Lottery) \lor happy(x)}$

٢ـ كل شخص محظوظ يربح اليانصيب

$\forall x: Lucky(x) \Rightarrow win(x, Lottery)$

نحولها إلى شكل العطف النظامي :

$\forall x: \neg Lucky(x) \lor win(x, Lottery)$

$\boxed{\neg Lucky(x) \lor Win(x, Lottery)}$

٣ـ كل شخص محظوظ ينجح في كل المواد

$\forall x \, \forall y: Lucky(x) \Rightarrow pass(x, y)$

نحولها إلى شكل العطف النظامي :

$\forall x \, \forall y: \neg Lucky(x) \lor pass(x, y)$

$\boxed{\neg Lucky(x) \lor pass(x, y)}$

٤ـ رامي شخص محظوظ

$\boxed{Lucky(Rami)}$

المطلوب إثبات أنه رامي شخص سعيد

$Happy(Rami)$

ننفي الطلب :

$\neg Happy(Rami)$

نغير أسماء المتحولات فتصبح لدينا :

$\neg pass(x, math) \lor \neg win(x, Lottery) \lor happy(x)$

$\neg Lucky(x_1) \lor Win(x_1, Lottery)$

$\neg Lucky(x_2) \lor pass(x_2, y)$

$Lucky(Rami)$

/ /

$\neg Happy(Rami)$ $\neg pass(x, math) \vee \neg win(x, Lottery) \vee happy(x)$

$x / Rami$

$\neg Pass(Rami, math) \vee \neg win(Rami, Lottery)$ $\neg lucky(x_1) \vee win(x_1, Lottery)$

$x_1 / Rami$

$\neg pass(Rami, math) \vee \neg Lucky(Rami)$ $\neg lucky(x_2) \vee pass(x_2, y)$

$x_2 / Rami$
$y / math$

$\neg Lucky(Rami)$ $Lucky(Rami)$

Null

انتهت المحاضرة الرابعة